双向差分灰色模型及其在水文预报中的应用

朱德来

(芜湖水文水资源局,安徽 芜湖　241000)

摘要:采用双向差分建立一种水文预报模型.该模型与传统 GM(1,1)模型的不同之处在于如何推求 GM(1,1)模型的参数.本文是在某一预报量的前后差预报误差之和趋于最小时求出模型的参数.该模型用于宣城站年最高水位预报的结果表明,通过残差、后验差检验,模型达到了灰色模型所规定的精度等级(一级).

关键词:双向差分;灰色模型;水文预报;模型检验

中图分类号:P338;O24　　文献标识码:A　　文章编号:1006-7647(2005)S1-0004-02

目前灰色系统理论已广泛应用于自然科学、社会经济、农业、气象、军事等众多领域,它的重要贡献在于打破了传统地将系统简单划分为"黑色系统"和"白色系统"的习惯做法,并提出"灰数"、"灰平面"、"灰色统计"等一系列全新概念,为不确定问题的研究提供了新思路.灰色系统是指既含有已知信息又含有未知的或非确定信息的系统.由于水文系统样本较短,仅是总体的一部分,故水文系统也可看作是一种灰色系统.因此,本文引用文献[1]介绍一种双向(前后)差分灰色模型,并将其应用于水文变量的拟合和预报,试图在水文系统的建模及应用上探索新途径.

1　双向差分灰色模型

灰色系统理论认为,灰色系列都可以通过某种生成弱化其随机性而呈现本来的规律,并通过灰色数据应用微分方程建立 GM(1,1)模型.本文基本思想是采用线性表达式 $-ax^{(1)}(t)+u$ 对预报量 $\Delta x^{(1)}(t)$ 作预报.由于 $\Delta x^{(1)}$ 既可表示为向前差分,又可表示为向后差分,故使对前差分和后差分的预报误差之和达到最小来求出灰色模型 GM(1,1) 中的参数值.

设原始序列

$$x_1^{(0)} = \{x_1^{(0)}(1), x_1^{(0)}(2), \cdots, N\}$$

其一次累加序列

$$x_1^{(1)}(l) = \sum_{i=1}^{l} x_1^{(0)}(i) \quad (l = 1,2,\cdots,N) \tag{1}$$

将 $\frac{\mathrm{d}x_1^{(1)}(t)}{\mathrm{d}(t)} + ax_1^{(1)}(t) = u$ 改写成

$$\frac{\mathrm{d}x_1^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t} = b_0 x_0^{(1)}(t) + b_1 x_1^{(1)}(t) = \sum_{i=1}^{l} b_i x_i^{(1)}(t)$$

式中 $x_0^{(1)}(t)=1$, $b_1=-a$,用等间距采样有 $\Delta t=(t+1)-t=1$,变上式为差分方程:

$$\Delta x_1^{(1)}(l) = \sum_{i=0}^{l} b_i x_i^{(1)}(l) \tag{2}$$

由于向后、向前差分方程可表示为

$$\Delta_{\mathrm{b}} x_1^{(1)}(l) = x_1^{(1)}(l) - x_1^{(1)}(l-1)$$

$$\Delta_{\mathrm{f}} x_1^{(1)}(l) = x_1^{(1)}(l+1) - x_1^{(1)}(l)$$

运用式(1)易求得

$$\Delta_{\mathrm{b}} x_1^{(1)}(l) = x_1^{(0)}(l)$$

$$\Delta_{\mathrm{f}} x_1^{(1)}(l) = x_1^{(0)}(l+1)$$

若将式(2)中右边变量 x_0 和 x_1 视作左边增量 Δx_1 的预报,则预报误差为

$$E_{\mathrm{b}} = \Delta_{\mathrm{b}} x_1^{(1)}(l) - \sum_{i=0}^{l} b_i x_i^{(1)}(l)$$

$$E_{\mathrm{f}} = \Delta_{\mathrm{f}} x_1^{(1)}(l) - \sum_{i=0}^{l} b_i x_i^{(1)}(l)$$

令

$$E = \sum_{l=2}^{N-1} (E_{\mathrm{b}}^2(l) + E_{\mathrm{f}}^2(l)) \to \min \tag{3}$$

从 $l=2$ 开始,是因为 $x_1^{(1)}(1)$ 留作时间响应方程中的初值使用.让式(3)分别对 b_0 和 b_1 求偏导,并分别令其为零:

$$\frac{\partial E}{\partial b_0} = \frac{\partial}{\partial b_0}\sum_{l=2}^{N-1}[x_1^{(0)}(l) - b_0 x_0^{(1)}(l) - b_1 x_1^{(1)}(l)]^2 + \frac{\partial}{\partial b_0}\sum_{l=2}^{N-1}[x_1^{(0)}(l+1) - b_0 x_0^{(1)}(l) - b_1 x_1^{(1)}(l)]^2 = 0$$

作者简介:朱德来(1961—),男,上海人,工程师,从事水文水资源工作.

$$b_0\sum_{l=2}^{N-1}[x_0^{(1)}(l)]^2+b_1\sum_{l=2}^{N-1}x_1^{(1)}(l)x_0^{(1)}(l)=$$
$$\frac{1}{2}\sum_{l=2}^{N-1}x_1^{(0)}(l)x_0^{(1)}(l)+\frac{1}{2}\sum_{l=2}^{N-1}x_1^{(0)}(l+1)x_0^{(1)}(l) \tag{4}$$

同理，$\frac{\partial E}{\partial b_1}=0$ 有

$$b_0\sum_{l=2}^{N-1}x_0^{(1)}(l)x_1^{(1)}(l)+b_1\sum_{l=2}^{N-1}[x_1^{(1)}(l)]^2=$$
$$\frac{1}{2}\sum_{l=2}^{N-1}x_1^{(0)}(l)x_1^{(1)}(l)+\frac{1}{2}\sum_{l=2}^{N-1}x_1^{(0)}(l+1)x_1^{(1)}(l) \tag{5}$$

式(4)和式(5)两边均除以 $N-2$(N 为序列个数). 将 $x_0^{(1)}(l)=1$ 代入，并令

$$A_{10}=\frac{1}{2(N-2)}\left[\sum_{l=2}^{N-1}x_1^{(0)}(l)+\sum_{l=2}^{N-1}x_1^{(0)}(l+1)\right]$$
$$A_{11}=\frac{1}{2(N-2)}\left[\sum_{l=2}^{N-1}x_1^{(0)}(l)x_1^{(1)}(l)+\sum_{l=2}^{N-1}x_1^{(0)}(l+1)x_1^{(1)}(l)\right]$$
$$D=\frac{1}{N-2}\sum_{l=2}^{N-1}x_1^{(1)}(l)$$
$$C_0=\frac{1}{N-2}\sum_{l=2}^{N-1}1^2=1$$
$$C_1=\frac{1}{N-2}\sum_{l=2}^{N-1}[x_1^{(1)}(l)]^2$$

式(4)和式(5)变为

$$\begin{cases}b_0C_0+b_1D=A_{10}\\ b_0D+b_1C_1=A_{11}\end{cases} \tag{6}$$

令 $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}b_0\\b_1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}A_{10}\\A_{11}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}C_0D\\DC_1\end{bmatrix}$，则式(6)可写成矩阵形式

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B\beta}$$

$\boldsymbol{\beta}$ 的最小二乘计算式为

$$\hat{\beta}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}A=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} \tag{7}$$

写出时间响应方程为

$$x_1^{(1)}(l+1)=\left(x_1^{(1)}(1)+\frac{\hat{b}_0}{\hat{b}_1}\right)\mathrm{e}^{b_1l}-\frac{\hat{b}_0}{\hat{b}_1} \tag{8}$$

式(8)即为所求的双向差分灰色模型，该模型主要是对时间序列进行拟合和预报，即预报洪涝(或旱灾)出现的时间. 式中 $x_1^{(1)}(1)=x_1^{(1)}(0)$ 为序列 x_1 之初始值.

2 模型应用与检验

用长江中下游水阳江宣城站 1957 ~ 1982 年的年最高水位进行分析，取洪灾阈值 $H=17.00$ m，水位超过阈值的年份有 1961，1969，1973 和 1977 年. 将原始数据转变初始序列：

$$x_1^{(0)}(l)=(5,13,17,21)$$

其一次累加生成为

$$x_1^{(1)}(l)=(5,18,35,56)$$

用前述公式求得

$$A_{10}=\frac{1}{2\times(4-2)}[(13+17)+(17+21)]=17$$
$$A_{11}=\frac{1}{2\times2}\Big[(13\times18+17\times35)+(17\times18+21\times35)\Big]=467.5$$
$$D=\frac{1}{2}(18+35)=26.5$$
$$C_0=1\qquad C_1=\frac{1}{2}[18^2+35^2)=774.5$$
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}17\\467.5\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&26.5\\26.5&774.5\end{bmatrix}$$
$$\hat{\beta}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\hat{b}_0\\\hat{b}_1\end{bmatrix}=$$
$$\frac{1}{72.25}\begin{bmatrix}774.5&-26.5\\-26.5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}17\\467.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10.764\,705\,88\\0.235\,294\,117\end{bmatrix}$$

将初值 $x_1^{(0)}=5$，$\hat{b}_0$，$\hat{b}_1$ 代入式(8)得

$$x_1^{(1)}(l+1)=45.75\mathrm{e}^{0.2353l}-45.75$$

通过一次累减还原进行拟合和预报，如 $l=4$，用 $1\,956+[\hat{x}_1^{(1)}(5)-\hat{x}_1^{(1)}(4)]=1\,956+84.3-57.1=1\,956+27.2=1\,983.2\approx1\,983$(a)，表明 1983 年左右将发生高于 17.00 m 的洪水，实际上 1983 年和 1984 年该站年最高水位均高于 17.00 m. 同样预报出 1991 和 1999 年的大洪水与实际情况完全一致. 具体预报结果见表 1，并在确定模型是否可信时作出如下等级检验：

残差均值

$$\bar{q}_0=\frac{1}{4}\sum_{0}^{3}q(l)=\frac{1}{4}\times1.1=0.275$$

残差方差

$$S_2^2=\frac{1}{4}\sum_{0}^{3}(q(l)-\bar{q}_0)^2$$
$$S_2^2=0.076\,875\qquad S_2=0.277\,3$$

表 1 宣城站年最高水位灰色预报结果

序号 l	年份 n	统计值 $x_1^{(0)}(l)$	预报值 $\hat{x}_1^{(0)}(l)$	残差 $q(l)$	相对误差/%	精度/%
0	1961	5	5	0	0	100
1	1969	13	13.5	0.5	3.85	96.3
2	1973	17	17	0	0	100
3	1977	21	21.6	0.6	2.86	97.2
4	1983	27	27.2	0.2	0.74	99.3
5	1991	35	34.5	0.5	-1.43	98.6
6	1999	43	43.7	0.7	1.63	98.4

(下转第 75 页)

3 试验结论及建议

a. 布置方案经适当调整后，满足泄流能力、水舌空中纵横向分散、水舌入水位置、下游靠岸流速以及下游消能防冲等各项综合指标的要求.

b. 泄洪表孔流量系数范围为 0.31 ~ 0.43，最大泄流能力 98 m^3/s，比设计值略小；泄洪底孔流量系数范围为 0.84 ~ 0.93，最大泄流能力 825 m^3/s，比设计值大约 120 m^3/s；表孔与底孔的分流比约为 11% 和 89%. 山区河流洪峰流量大、历时短，大部分洪水采用底孔泄流是合适的.

c. 各孔进口附近没有发现漩涡，表孔的侧收缩不明显，但在接近出口处有明显的交叉冲击波；两底孔泄洪出口流态可见紊动的水翅，且直接拍打出口洞顶；水舌入水处附近也可见较高涌水.

d. 底孔挑距约为 36 m，远离坝脚，但入水位置接近副坝位置，将直冲副坝，两岸回流也较大，副坝作用不明显，建议取消.

e. 在较高水位工况下，两表孔水流挑离坝脚，对下游的冲刷不会造成危害；两表孔水舌归槽情况良好，水舌横向宽度沿程减小，且成交叉入水；但当表孔堰顶水头较小时，水舌入水位置靠近底孔坝脚.

f. 1 号和 4 号表孔流量系数范围为 0.42 ~ 0.47，最大泄流能力 134 m^3/s；2 号和 3 号表孔流量系数范围为 0.53 ~ 0.56，最大泄流能力为 61 m^3/s；4 个表孔联合最大泄量约为 195 m^3/s；底孔流量系数平均值为 0.9445，最大泄流能力约 657 m^3/s；表、底孔最大泄量试验结果与设计值接近，能满足设计泄量要求.

g. 进口附近也没有发现漩涡，1 号和 4 号表孔的水流侧收缩不明显；2 号和 3 号进口处水流有侧收缩存在，水流在坝面流动顺畅，没有发现不良流态.

h. 各表孔水舌在纵向和横向均能较好错开，分层入水明显；各表孔水舌均能挑离底孔坝脚，2 号和 3 号水舌能较好地与两底孔碰撞；1 号和 4 号表孔水舌入水角较大，低水头运行时挑距较短，两种运行工况试验结果表明：1 号和 4 号表孔水舌入水处离底孔出口最近约为 7 m，最远约为 14 m；2 号和 3 号表孔水舌入水角约为 60°左右，入水情况良好，2 号和 3 号表孔水舌入水处离底孔出口最近约 16 m，水面线较低，将 2 号和 3 号表孔边墙高度降低.

4 结 语

该工程两机组已于 2005 年 10 月 25 日、11 月 25 日相继正式并网投入运行，目前，坝体各泄洪建筑物运行正常，经过 2005 年 8 月 14 日洪峰流量达 486 m^3/s 的洪水验证，泄洪底孔运行正常（当时表孔未建成），流态平稳，初步说明底孔试验成果的可靠性.

（收稿日期：2005-11-07 编辑：熊水斌）

（上接第 5 页）

序列离差

$$S_1^2 = \frac{1}{4}\sum_{0}^{3}\left(x_1^{(0)}(l) - \overline{x_1^{(0)}(l)}\right)^2 = 35$$

$$S_1 = 5.916$$

后验差之比 $C = \frac{S_2}{S_1} = 0.0469$

小误差频率

$$P = P\{|q(l)|\} < 0.6745S_1$$

$$\max|q(l)| = 0.6$$

$$0.6745S_1 = 3.99$$

$$\forall |q(l)| < 0.6745S_1 \quad 故\ P = 1$$

检验结果表明 $P = 1$，$C = 0.0469$，远超出灰色模型规定之预测等级一级精度标准（$P > 1$，$C < 0.35$）.

3 结 语

灰色预测的特点是所需信息少、计算简便，能克服数据不足或系统周期短的矛盾. 但由于灰色模型的解是指数函数，其几何图形是一条光滑曲线，因而对相对稳定的周期叠加后才能逼近该曲线而使精度大幅度提高，而水文周期的好坏直接影响着灰色预测的能力，同时阈值的大小也影响着预报的结果，一般定出的阈值在随时间变化中应呈现某一规律. 所以在实际工作中，应有针对性地选用. 对于非周期性水文变量的预测，可以采用干涉因子构成新的信息序列并同时加以校正. 总之，灰色模型在水文领域中将有着广阔的应用前景，并将有待于人们去进一步研究.

参考文献：

[1] 曹军，胡万义. 灰色系统理论与方法[M]. 哈尔滨：东北林业大学出版社，1992.

[2] 夏军. 水文灰色系统 DHGM 模型识别与实时灰色预测[J]. 水文，1988，8(1)：1-6.

[3] 张善余，程胜余. 洪涝灾害的灰色预测[J]. 水文，2000，20(2)：23-25.

（收稿日期：2005-01-11 编辑：高建群）