一种近似计算结构体系失效概率的新方法

王笑纷[1],吴彰敦[2]

(1.广东海洋大学工程学院,广东 湛江 524088;2.广西大学土木建筑工程学院,广西 南宁 530004)

摘要:介绍一种新的近似计算结构体系失效概率的方法——条件概率降维法.该方法首先将结构体系失效概率表达为与高维标准正态分布值有关的公式,然后根据概率乘法定理,通过将条件分布近似为某一正态分布并利用条件分布间的相关系数计算公式和迭代近似的思想,将高维标准正态分布值转化为多个一维标准正态分布值的乘积,从而简化了结构体系失效概率的计算,便于工程应用.算例表明,该方法计算简单,应用方便,精度较高.

关键词:结构体系;失效概率;条件概率降维法;高维标准正态分布函数;近似计算

中图分类号:TU311.4 文献标识码:A 文章编号:1006-7647(2005)S1-0057-03

结构体系可靠度分析包括寻找体系主要失效模式和计算体系失效概率两大任务[1].在已找到主要失效模式的前提下,结构体系失效概率的计算涉及不规则积分域的多重积分,精确计算它比较困难.因此,在实际应用中,结构体系的失效概率不是直接利用高维积分计算,而是采用各种近似方法求得.目前常用的计算结构体系失效概率 P_{f} 的方法有宽界限法、窄界限法、PNET 法、快速半数值积分法及蒙特卡洛法等,这些方法都有着各自的优缺点及应用局限[1,2].本文介绍一种新的近似计算结构体系失效概率的方法——条件概率降维法[3,4].该方法将结构体系失效概率表达为与高维标准正态分布值有关的公式,然后根据概率乘法定理,通过将条件分布近似为某一正态分布并利用条件分布间的相关系数计算公式和迭代近似的思想,将高维标准正态分布值转化为多个一维标准正态分布值的乘积,从而使结构体系失效概率的计算得以简化,便于工程应用.

1 条件概率降维法计算公式

结构体系可靠度问题分为串联结构体系和并联结构体系两个基本类型.本文主要介绍串联结构体系失效概率计算的条件概率降维法.

1.1 用 n 维标准正态函数表示结构体系失效概率

设串联结构体系有 n 个失效模式,假设已通过坐标变换和映射等方法,将非正交、非标准正态分布的基本随机向量转换为正交的标准正态随机向量 $\boldsymbol{U}=(U_1,U_2,\cdots,U_k)^{\mathrm{T}}$.利用一次二阶矩法求得第 i 个失效模式的可靠指标 β_i 和设计验算点处的线性化平面为

$$Z_i \approx -\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{U}+\beta_i=0 \tag{1}$$

式中:$\boldsymbol{\alpha}_i$ 为该线性化平面的单位余弦向量.

可以用以各失效模式的可靠指标列向量 $\boldsymbol{\beta}$ 和相关系数矩阵 $\boldsymbol{\rho}$ 为参数的 n 维标准正态分布函数来表示串联结构体系的失效概率 P_{fs}[3-5]:

$$P_{\mathrm{fs}}=1-\Phi_n(\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\rho}) \tag{2}$$

式中:$\Phi_n(\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\rho})$ 为 n 维标准正态分布函数;$\boldsymbol{\beta}$ 为各单个失效模式的可靠指标按小到大排成的列向量,$\boldsymbol{\beta}=(\beta_i)_{n\times 1}$,$1\leqslant i\leqslant n$;$\boldsymbol{\rho}$ 为失效模式间的相关系数组成的方阵,$\boldsymbol{\rho}=(\rho_{ij})_{n\times n}$,$1\leqslant i,j\leqslant n$;元素 ρ_{ij} 为第 i 个失效模式与第 j 个失效模式的相关系数[1]:

$$\rho_{ij}=\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j \tag{3}$$

1.2 标准正态分布函数降维

下面讨论将 n 维标准正态分布函数值转化为多个易于计算的一维标准正态分布函数值乘积的方法.根据 n 维标准正态分布函数的定义和概率乘法定理有

$$\Phi_n(\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\rho})=P\{\bigcap_{i=1}^{n}V_i\leqslant\beta_i\}=P\{\bigcap_{i=2}^{n}V_i\leqslant\beta_i\,|\,V_1\leqslant\beta_1\}P\{V_1\leqslant\beta_1\}$$

式中:V_i 为由标准正态分布向量 $\boldsymbol{U}=(U_1,U_2,\cdots,U_k)^{\mathrm{T}}$ 线性组合得出的随机变量,仍服从标准正态分布,所以有

作者简介:王笑纷(1973—),女,助教,硕士,从事水工结构教学及研究工作.

$$\Phi_n(\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\rho}) = P\{\bigcap_{i=2}^{n} V_i \leqslant \beta_i \mid V_1 \leqslant \beta_1\}\Phi(\beta_1) \tag{4}$$

其中 $\Phi(*)$表示一维标准正态分布函数值.

如果想通过式(4)计算 n 维标准正态分布函数值,必须首先求得各个条件概率 $P\{V_i \leqslant \beta_i \mid V_1 \leqslant \beta_1\}$ 的值.若将条件分布 $P\{V_i \leqslant v_i \mid V_1 \leqslant \beta_1\}$ 近似地转化为以下面均值与方差为参数的标准正态分布[4]:

$$\mu = -\rho_{i1}(1+\rho_{i1})\frac{\phi(\beta_1)}{\Phi(\beta_1)} \tag{5}$$

令$\frac{\phi(\beta_1)}{\Phi(\beta_1)} = A_1$,则

$$\mu = -\rho_{i1}(1+\rho_{i1})A_1$$

$$\sigma^2 = 1-\rho_{i1}^2(1+\rho_{i1}^2)A_1(\beta_1+A_1) \tag{6}$$

令 $A_1(\beta_1+A_1) = B_1$,则

$$\sigma^2 = 1-\rho_{i1}^2(1+\rho_{i1}^2)B_1$$

那么条件概率

$$P\{V_i \leqslant \beta_i \mid V_1 \leqslant \beta_1\} \approx \Phi\left(\frac{\beta_i-\mu}{\sigma}\right) \xlongequal{\text{记为}} \Phi(\beta_{i|1}) \tag{7}$$

利用式(5)和(6),分位值

$$\beta_{i|1} = \frac{\beta_i+\rho_{i1}(1+\rho_{i1})A_1}{\sqrt{1-\rho_{i1}^2(1+\rho_{i1}^2)B_1}} \tag{8}$$

另外,条件事件 $\{V_j \leqslant v_j \mid V_1 \leqslant \beta_1\}$ 与 $\{V_i \leqslant v_i \mid V_1 \leqslant \beta_1\}$ $(2 \leqslant i < j \leqslant n)$之间的相关系数计算式为[4]

$$\rho_{ji|1} = \frac{\rho_{ji}-\rho_{j1}\rho_{i1}B_1}{\sqrt{1-\rho_{j1}^2 B_1}\sqrt{1-\rho_{i1}^2 B_1}} \tag{9}$$

其中 B_1 的定义如前.至此,根据式(7)~(9),式(4)可转化为

$$\Phi_n(\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\rho}) \approx P\{\bigcap_{i=2}^{n} V_i \leqslant \beta_{i|1}\}\Phi(\beta_1) = \Phi_{n-1}(\boldsymbol{\beta}_{(1)};\boldsymbol{\rho}_{(1)})\Phi(\beta_1) \tag{10}$$

其中 $\boldsymbol{\beta}_{(1)} = (\beta_{i|1})_{(n-1)\times 1} \quad (2 \leqslant i \leqslant n)$

$\boldsymbol{\rho}_{(1)} = (\rho_{ij|1})_{(n-1)\times(n-1)} \quad (2 \leqslant i < j \leqslant n)$

1.3 迭代递推公式

如上,n 维标准正态分布函数降了一维,成为 $n-1$维标准正态分布函数值的计算.若将此过程向下递推,并在递推进程中统一符号记作:

$$\boldsymbol{\beta}_{(0)} = \boldsymbol{\beta} = (\beta_{i|0})_{n\times 1} = (\beta_i)_{n\times 1} \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

$$\boldsymbol{\rho}_{(0)} = \boldsymbol{\rho} = (\rho_{ij|0})_{n\times n} = (\rho_{ij})_{n\times n} \quad 1 \leqslant i,j \leqslant n$$

则有

$$\Phi_n(\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\rho}) = \Phi_n(\boldsymbol{\beta}_{(0)};\boldsymbol{\rho}_{(0)}) \approx \Phi_{n-1}(\boldsymbol{\beta}_{(1)};\boldsymbol{\rho}_{(1)})\Phi(\beta_{1|0})$$

$$\Phi_{n-1}(\boldsymbol{\beta}_{(1)};\boldsymbol{\rho}_{(1)}) \approx \Phi_{n-2}(\boldsymbol{\beta}_{(2)};\boldsymbol{\rho}_{(2)})\Phi(\beta_{2|1})$$

□

$$\Phi_{n-(k-1)}(\boldsymbol{\beta}_{(k-1)};\boldsymbol{\rho}_{(k-1)}) \approx \Phi_{n-k}(\boldsymbol{\beta}_{(k)};\boldsymbol{\rho}_{(k)})\cdot\Phi(\beta_{k|(k-1)}) \quad (1 \leqslant k \leqslant n-1)$$

□

$$\Phi_2(\boldsymbol{\beta}_{(n-2)};\boldsymbol{\rho}_{(n-2)}) \approx \Phi_1(\boldsymbol{\beta}_{(n-1)};\boldsymbol{\rho}_{(n-1)})\cdot\Phi(\beta_{(n-1)|(n-2)}) = \Phi(\beta_{n|(n-1)})\Phi(\beta_{(n-1)|(n-2)})$$

其中 $\boldsymbol{\beta}_{(k)} = (\beta_{i|k})_{(n-k)\times 1} \quad k < i \leqslant n$

$\boldsymbol{\rho}_{(k)} = (\rho_{ij|k})_{(n-k)\times(n-k)} \quad k < i < j \leqslant n$

$$\beta_{i|k} = \frac{\beta_{i|(k-1)}+\rho_{ik|(k-1)}(1+\rho_{ik|(k-1)})A_{k|(k-1)}}{\sqrt{1-\rho_{ik|(k-1)}^2(1+\rho_{ik|(k-1)}^2)B_{k|(k-1)}}} \quad (1 \leqslant k < i \leqslant n) \tag{11}$$

$$A_{k|(k-1)} = \frac{\phi(\beta_{k|(k-1)})}{\Phi(\beta_{k|(k-1)})} \quad (1 \leqslant k \leqslant n-1) \tag{12}$$

$$B_{k|(k-1)} = A_{k|(k-1)}(\beta_{k|(k-1)}+A_{k|(k-1)}) \quad (1 \leqslant k \leqslant n-1) \tag{13}$$

$$\rho_{ji|k} = \frac{\rho_{ji|(k-1)}-\rho_{jk|(k-1)}\rho_{ik|(k-1)}B_{k|(k-1)}}{\sqrt{(1-\rho_{jk|(k-1)}^2 B_{k|(k-1)})}\sqrt{(1-\rho_{ik|(k-1)}^2 B_{k|(k-1)})}} \quad (1 \leqslant k < i < j \leqslant n) \tag{14}$$

将以上各式由下向上回代,n 维标准正态分布函数值的计算就可以近似地化为 n 个一维标准正态分布函数值的乘积,即

$$\Phi_n(\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\rho}) \approx \prod_{k=1}^{n}\Phi(\beta_{k|(k-1)}) \tag{15}$$

式(11)~(15)就是条件概率降维法求解串联结构体系失效概率的计算公式.

1.4 条件概率降维法计算步骤

a. 通过坐标变换,利用一次二阶矩法在标准正态随机向量空间内求解单个失效模式的可靠指标及其失效界面在设计验算点处的线性化切平面,然后将可靠指标按从小到大的顺序排列形成可靠指标列向量 $\boldsymbol{\beta}_{(0)} = \boldsymbol{\beta}(\beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \cdots \leqslant \beta_n)$,并根据式(3)计算对应的相关系数矩阵 $\boldsymbol{\rho}_{(0)} = \boldsymbol{\rho}$;

b. 依次取 $k = 1,2,\cdots,n-1$,由式(12),(13),(11)和(14)计算每个 k 值对应的$\beta_{i|k}$和$\rho_{ji|k}$值($k < i < j \leqslant n$);

c. 由式(15)得出 $\Phi_n(\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\rho})$的近似值;

d. 由式(2)得出体系失效概率的近似值.

2 简单工程算例

分析图 1 所示混凝土重力坝坝段结构体系可靠度和失效概率.设基本随机变量为混凝土的抗拉强度 R_t 和抗压强度 R_c、上游水位 h、混凝土容重 γ_c、坝顶附加荷载 Q、摩擦系数 f 和凝聚力 c 等.水的容重按常量计 $\gamma_w = 9.8\ \mathrm{kN/m^3}$.各基本随机变量相互独立,且均服从正态分布,其统计特征如表 1 所示.

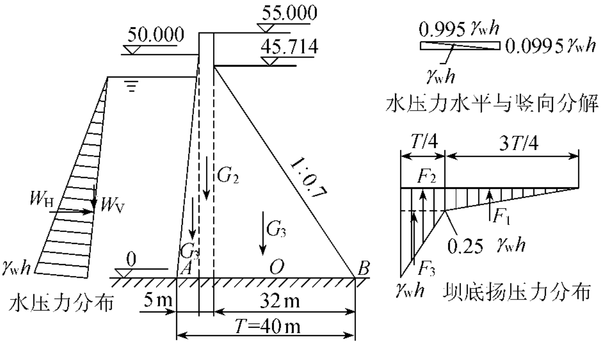

图 1　重力坝计算简图

表 1　基本变量的统计参数

统计量	R_c/kPa	R_t/kPa	h/m	γ_c/(kN·m^{-3})	f	c/kPa	q/kN
均值	125000	900	50	24	1.2	100	250
标准差	3750	360	3	0.72	0.36	50	87.5

a. 受力计算 取 1 m 宽的坝段计算. 计算结果列于表 2(其中力以向下为正,向上为负;力矩以顺时针方向为正,逆时针方向为负).

表 2　重力坝段受力(分力)计算

作用力	分力大小	位置(距 O 点)	分力矩(对 O 点)
自重	$G_1=0.5\times5\times50\times1\times\gamma_c=125\gamma_c$	16.667	$-2083.375\gamma_c$
	$G_2=3\times55\times1\times\gamma_c=165\gamma_c$	13.500	$-2227.500\gamma_c$
	$G_3=0.5\times32\times45.714\times1\times\gamma_c=731.424\gamma_c$	1.333	$974.988\gamma_c$
水压力	$W_V=0.5\times h\times0.0995\times\gamma_w h\times1=0.488h^2$	$20-h/30$	$-9.76h^2+0.0163h^3$
	$W_H=0.5\times h\times0.995\times\gamma_w h\times1=4.876h^2$	$h/3$	$1.625h^3$
扬压力	$F_1=-0.5\times30\times0.25\times\gamma_w h\times1=-36.75h$	0	0
	$F_2=-10\times0.25\gamma_w h\times1=-24.5h$	15	$367.500h$
	$F_3=-0.5\times10\times0.75\times\gamma_w h\times1=-36.75h$	16.667	$612.512h$
坝顶荷载	Q	13.5	$-13.5Q$

注:合力计算 $\sum V=1021.424\gamma_c-98h+0.488h^2+Q$,$\sum H=4.876h^2$,$\sum M(O)=-5285.863\gamma_c+980.012h-9.76h^2+1.641h^3-13.5Q$.

b. 确定主要失效模式的功能函数列于表 3.

表 3　各失效模式的功能函数

序号	失效模式	功能函数
1	坝体滑动	$Z_1=f\sum V+CA-\sum H=1021.424f\gamma_c-98fh+0.488fh^2+fQ+40C-4.876h^2$
2	坝踵抗拉强度不够	$Z_2=R_t-\left(\frac{6\sum M(O)}{T^2}-\frac{\sum V}{T}\right)=R_t+45.358\gamma_c-6.125h+0.0488h^2-0.00615h^3+0.0756Q$
3	坝趾抗压强度不够	$Z_3=R_c-\left(\frac{\sum V}{T}+\frac{6\sum M(O)}{T^2}\right)=R_c-5.714\gamma_c-1.225h+0.0244h^2-0.00615h^3+0.0256Q$

c. 求可靠指标及相关系数 将基本随机向量 $X=[R_c,R_t,h,\gamma_c,f,C,Q]^T$ 转化为标准正态随机向量 $U=[U_1,U_2,\cdots,U_7]^T$,然后求得各失效界限在设计验算点处的线性化平面方程及可靠指标,并由式(3)计算得失效模式间的相关系数见表 4.

表 4　标准正态随机向量空间内线性化平面方程及可靠指标

失效模式	验算点处的线性化平面方程	可靠指标	相关系数		
			失效模式 1	失效模式 2	失效模式 3
1	$Z_1=-0.1967U_3+0.0435U_4+0.9467U_5+0.2510U_6+0.0052U_7+2.1365=0$	2.1365	1	0.0832	0.0071
2	$Z_2=0.9107U_2-0.4043U_3+0.0826U_4+0.0167U_7+2.6923=0$	2.6923	0.0832	1	0.0146
3	$Z_3=0.9993U_1-0.0364U_3-0.0011U_4+0.0006U_7+3.0434=0$	3.0434	0.0071	0.0146	1

注:失效模式 1,2,3 的含义见表 3.

d. 条件概率降维法计算重力坝失效概率 按式(15)近似计算的四维标准正态分布函数值 $\Phi_4(\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\rho})=0.97909$,由式(2)得出的失效概率 $P_f=0.02091$. 作为检验,本例采用蒙特卡洛法抽样 10^7 次,得到该坝的失效概率 $\hat{P}_f=0.02124$.

数据对比显示,条件概率降维法近似计算失效概率精度较高,计算过程只涉及代数运算,操作简单.

3　结　语

本文给出了一种近似计算结构体系失效概率的新方法——条件概率降维法的计算公式,并通过实际算例说明了条件概率降维法的应用. 算例表明,该法简单实用. 精度较好;与蒙特卡洛法相比较,运算时间少. 笔者认为,条件概率降维法具有一定的工程应用推广价值.

参考文献:

[1] 吴世伟. 结构可靠度分析[M]. 北京:人民交通出版社,1990.

[2] 赵国藩. 工程结构可靠性理论与应用[M]. 大连:大连理工大学出版社,1996.

[3] PANDEY M D. An effective approximation to evaluate multinormal integrals[J]. J Structural Safety,1998(20):51-67.

[4] 王笑纷. 结构体系失效概率近似计算的条件概率降维法[D]. 南宁:广西大学,2004.

[5] Palle Thoft-Christensen and Yoshisada Murotsu. Application of Structural Systems Reliability Theory[M]. Berlin:Springer-Verlag,1986.

(收稿日期:2005-05-08　编辑:高建群)