

ANSYS 软件在 Biot 固结方程求解中的应用

高子坤,施建勇,顾士坦

(河海大学岩土工程科学研究所,江苏 南京 210098)

摘要:根据 ANSYS 软件中所使用的热传导方程与 Biot 固结方程的相似性,应用 ANSYS 软件的热传导模块求解 Biot 固结方程,为 Biot 固结方程的求解与分析提供一种简单、快速和准确的方法。通过与其他方法计算结果进行比较,验证了该方法的简单性与有效性,也为大型通用软件在岩土工程其他方向的应用提供一种思路。

关键词:ANSYS 软件;岩土工程;Biot 固结方程

中图分类号:TU47;TP31 **文献标识码:**B **文章编号:**1006-7647(2006)03-0059-03

Application of software ANSYS to solving Biot consolidation equation//GAO Zi-kun, SHI Jian-yong, GU Shi-tan
(Geotechnical Research Institute of Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: Based on the similarity of the heat conduction equation used in software ANSYS and the Biot consolidation equation, the heat conduction module of software ANSYS was employed to solve the Biot consolidation equation. The comparison of the results with those of other methods verifies that the method is simple and effective. The study provides a train of thought for application of large universal software to other fields of geotechnical engineering.

Key words: software ANSYS; geotechnical engineering; Biot consolidation equation

ANSYS 软件是融结构、热、流体、电磁、声学于一体的大型通用有限元分析软件,广泛应用于土木工程、电子、国防、机械等行业^[1-3],但在岩土工程中应用不多,也缺乏系统性。对于 Biot 固结方程,由于考虑了外力与孔隙水压力的耦合作用,不能简单应用 ANSYS 软件的已有模块进行求解。因为渗流场与温度场具有相似的微分方程,所以已经有人应用 ANSYS 软件中的热力学分析模块分析地下水渗流场。由于饱和土的 Biot 固结问题不仅包括渗流场,而且要考虑应力场,所以固结问题的分析较渗流问题复杂。本文通过对 ANSYS 软件中使用的热传导方程与 Biot 固结方程的比拟,得到用 ANSYS 软件分析固结问题时所需的参数,并编写了相应的 ANSYS 求解程序。通过对 ANSYS 软件求解结果与相应的太沙基单向固结问题的解析解以及其他数值解的比较,说明本文参数确定方法与简化思想的正确性,并进一步讨论孔隙水消散速度与泊松比的关系。

1 Biot 固结方程的计算参数分析

ANSYS 程序中用于求解温度场的方程如下^[1]:

$$\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q$$

式中表示质量传输的项 $v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z}$ 仅在 KEYOPT(8)=1,而且所用单元为 PLANE55 或 SOLID70 时有效。在本文中使该项无效,所以此时的热传导方程为

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q \tag{1}$$

式中: ρ 为密度; c 为比热容; T 为温度, $T=T(x,y,z,t)$; Q 为热源密度, $Q=Q(x,y,z,t)$; k_i 为传导系数, $k_i=k_i(x,y,z,T)$, $i=x,y,z$ 。

由文献[4]知 Biot 固结方程如下:

$$\frac{\rho_w}{K} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{sx} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{sy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_{sz} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\rho_w}{K} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \tag{2}$$

式中: ρ_w 为水的密度; K 为体积变形模量; u 为孔隙水压力, $u=u(x,y,z,t)$; σ 为总体积应力, $\sigma=\frac{\Theta(x,y,z,t,u)}{3}=\sigma'_m+u$, σ'_m 为有效体积应力, $\sigma'_m=\frac{(\sigma'_x+\sigma'_y+\sigma'_z)}{3}$; k_{si} 为渗透系数, $k_{si}=k_{si}(x,$

$y, z, u), i = x, y, z。$

比较式(1)、式(2)可知,要应用 ANSYS 软件求解 Biot 固结方程,必需满足

$$\rho c = \frac{\rho_w}{K} \tag{3}$$

$$k_i(x, y, z, T) = k_{si}(x, y, z, u) \tag{4}$$

$$Q = \frac{\rho_w}{K} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \tag{5}$$

在实际应用中,式(3)、式(4)较容易满足,而满足式(5)则较为困难。

特别地,在无限均布变荷载条件下,认为土体无侧向变形,由广义虎克定律可得总应力表达式如下:

$$\sigma = \frac{2u(1-2\nu)+p(1+\nu)}{3(1-\nu)}$$

式中: p 为无限均布变荷载, $p = p(t)$; ν 为泊松比。

把该式代入式(5),并考虑到 $K = \frac{E_0}{3(1-2\nu)}$,得

$$Q = \frac{\rho_w(1-2\nu)}{E_0} \left[\frac{2(1-2\nu)}{1-\nu} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial p}{\partial t} \right] \tag{6}$$

由式(6)可知孔隙水的消散速度还与土的泊松比有关,这既说明用 Biot 固结方程求解饱和土固结问题更为合理,同时也提供了一种通过孔隙水压力消散速度来反算泊松比的方法。

2 ANSYS 在单向固结问题中的应用

首先,检验太沙基固结问题的解析解与基于 ANSYS 的 Biot 固结方程求解结果是否符合,即上述想法是否合理。由文献[5]得均布荷载作用下太沙基单向固结问题的解析解如下:

$$u = \frac{4\sigma_z}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi z}{2H} \exp(-m^2 \frac{\pi^2}{4} T_v) \tag{7}$$

$$\text{其中} \quad T_v = \frac{C_v}{H^2} t = \frac{k(1+e)}{a\rho_w H^2} t = \frac{kE_s t}{\rho_w H^2}$$

式中: T_v 为时间因子; C_v 为土的竖向固结系数; E_s 为压缩模量; H 为土层计算厚度; e 为土的孔隙比; k 为土的渗透系数; a 为压缩系数。

假设 $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$, $k = 1 \text{ m/d}$, $E_s = 1 \text{ kPa}$, $H = 10 \text{ m}$, $p_0 = 1 \text{ kPa}$, 且土层底部为不透水界面,求解式(7)得 $0 \text{ d} \leq t \leq 60 \text{ d}$ 时间段内土层底部不透水界面处的孔隙水压力随时间变化值,绘出曲线如图 1 中的实线。假设变形模量 $E_0 = E_s = 1 \text{ kPa}$, $\nu = 1/3$,则 $K = 1$;由式(5)可得 $Q = \frac{\rho_w}{K} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \approx 0$,代入式(2)后,编写 ANSYS 程序,可求解得 $0 \text{ d} \leq t \leq 60 \text{ d}$ 时间段内土层底部不透水界面处的孔隙水压力随时间变化值,如图 1 中的圆圈所示。由图 1 可见,ANSYS 的数值解

与解析解吻合非常好。

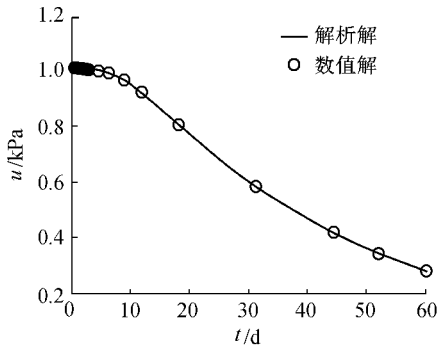


图 1 孔隙水压力随时间变化曲线

为进行进一步的验证,对以上问题考虑受变荷载作用的情况。假设荷载变化如图 2 所示,倾斜段的斜率为 0.1。根据式(5)得到如下关系:

$$\text{水平段} \quad Q = \frac{\rho_w}{K} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \approx 0$$

$$\text{倾斜段} \quad Q = \frac{\rho_w}{K} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \approx 0.1$$

编写 ANSYS 程序,可计算得变荷载作用下 $0 \text{ d} \leq t \leq 20 \text{ d}$ 时间段内土层底部不透水界面处的孔隙水压力随时间变化的 ANSYS 解,如图 3 中的圆圈所示(图中只包括 $\nu = 1/3$ 时的数据)。通过 ANSYS 解与文献[1]中 FORTRAN 程序的计算结果比较,可知变荷载作用下 ANSYS 解与 FORTRAN 解吻合得很好(见图 3)。

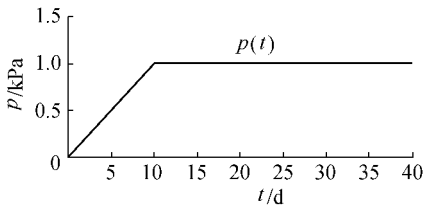


图 2 荷载变化曲线

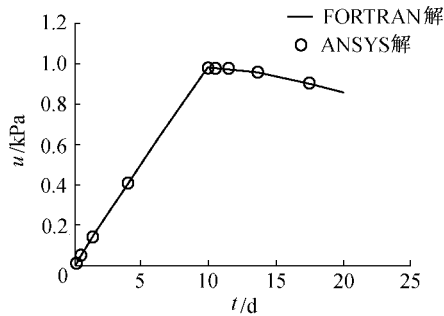


图 3 时间 t 与孔隙水压力 u 关系曲线

以下分析说明孔隙水压力消散速度与泊松比的关系。假设变形模量 $E_0 = E_s = 1 \text{ kPa}$, $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$, 根据式(6)有:

当 $\nu = 1/4$ 时

$$K = \frac{2}{3} \quad Q = \frac{\rho_w}{2E_0} \left(\frac{4\partial u}{3\partial t} + \frac{5\partial p}{3\partial t} \right) \approx \frac{3\partial p}{2\partial t}$$

当 $\nu = 1/3$ 时

$$K = 1 \quad Q = \frac{\rho_w}{3E_0} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + 2 \frac{\partial p}{\partial t} \right) \approx \frac{\partial p}{\partial t}$$

当 $\nu = 2/5$ 时

$$K = \frac{5}{3} \quad Q = \frac{\rho_w}{5E_0} \left(\frac{2\partial u}{3\partial t} + \frac{7\partial p}{3\partial t} \right) \approx \frac{3\partial p}{5\partial t}$$

当 $\nu = 9/20$ 时

$$K = \frac{10}{3} \quad Q = \frac{\rho_w}{10E_0} \left(\frac{0.2\partial u}{0.55\partial t} + \frac{1.45\partial p}{0.55\partial t} \right) \approx \frac{3\partial p}{10\partial t}$$

根据以上各式与图 2 所示的加载规律,应用 ANSYS 程序可求解得孔隙水压力的消散速度与泊松比关系(见图 4)。由图 4 可知,泊松比越大,孔隙水压力的消散速度越快。从计算结果看,太沙基固结理论可对应于 $\nu = 1/3$ 的情形。

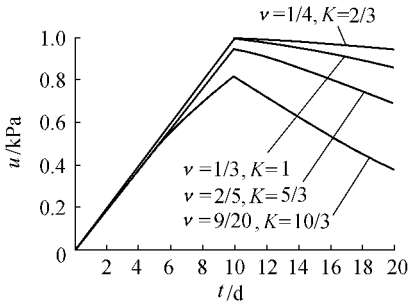


图 4 不同泊松比时的孔隙水压力随时间变化曲线

3 二维固结问题

以下简述二维固结问题的求解。模型如图 5,由 3 类各向异性的饱和土层组成,受变荷载(图 2 所示荷载)作用。各土层的物理力学参数如下: $k_{1x} = 5 \text{ m/d}$, $k_{1y} = 5 \text{ m/d}$; $k_{2x} = 1 \text{ m/d}$, $k_{2y} = 0.3 \text{ m/d}$; $k_{3x} = 2 \text{ m/d}$, $k_{3y} = 3 \text{ m/d}$; $E_i = 1 \text{ kPa}$, $\nu = \frac{1}{3}$, $i = 1, 2, 3$ 。利用 ANSYS 软件计算,并用其后处理模块进行处理,可得任意时刻的流速矢量分布图和等水压线图。图 6 为 $t = 20 \text{ d}$ 时的流速矢量分布。上面分析方法用于三维固结问题的求解时,代码编写及参数设置并不困难,但分析结果可能是近似的。

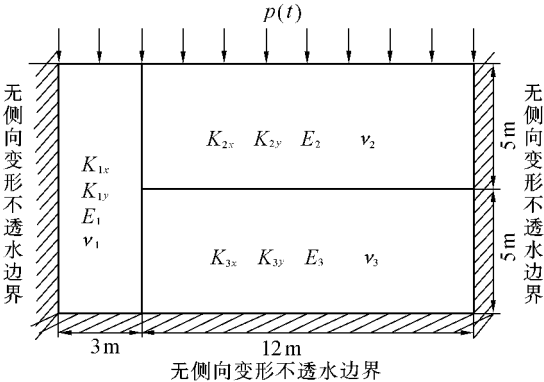


图 5 二维固结问题模型

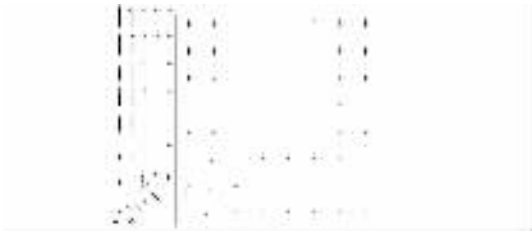


图 6 流速矢量分布

4 结 语

本文应用 ANSYS 软件求解 Biot 固结方程,目的是寻找一种求解 Biot 固结方程和分析其结果的简单、快速的方法,并为大型通用软件在岩土工程中的应用提供一种思路。随着计算机技术的进步和发展,各种通用软件将成为工程技术人员解决岩土工程问题的有力工具。

参考文献:

[1] 刘涛,杨凤鹏.精通 ANSYS[M].北京:清华大学出版社,2003:452-498.
[2] 陈善民,黄博.面向对象方法在 Biot 固结有限元程序中的应用[J].岩土力学,2002,23(4):465-469.
[3] 王国欣.科学计算软件在岩土工程计算中的应用[J].岩土工程技术,2002(2):64-66.
[4] SMITH I M.有限元方法编程[M].王崧,译.北京:电子工业出版社,2003:301-325.
[5] 施建勇.地基基础理论及应用[M].南京:河海大学出版社,2002:26-38.

(收稿日期:2005-02-28 编辑:高建群)

• 简讯 •

第二届中美水科学与工程数学模型进展研讨会将在北京举行

为促进中美水科学与工程数学模型领域学术交流的不断发展,国际泥沙研究培训中心与美国密西西比大学国家水科学与工程计算中心将于 2006 年 11 月 25~26 日在北京国际泥沙研究培训中心联合举行第二届中美水科学与工程数学模型进展研讨会。会议主题为水沙数学模型理论与应用的新进展。讨论议题有:①水沙运动基本理论;②模型开发与数值方法;③模型率定和验证;④模型在研究、工程与管理中的应用。详见 <http://www.irtces.org/conference/SinoUS/>。

(本刊编辑部供稿)