

无单元法的工程应用进展

陈小虎 沈振中

(河海大学水利水电工程学院 , 江苏 南京 210098)

摘要 : 介绍滑动最小二乘法的基本理论及无单元法的研究现状 , 总结应用无单元法模拟场问题的一般实现步骤 , 推导了无单元法模拟应力场、渗流场以及温度场等问题的整体平衡方程组 , 并介绍对边界约束条件、自由面迭代等问题的处理方法 , 阐述无单元法模拟裂纹开展的一般步骤 , 概括了无单元法解决实际工程问题时的优势以及不足之处 , 并提出有待于进一步研究的内容和方向。
关键词 : 无单元法 ; 滑动最小二乘法 ; 变分原理 ; 场问题 ; 综述
中图分类号 : O241 **文献标识码** : A **文章编号** : 1006-7647(2006)06-0090-05

Review of element-free method and its application in engineering // CHEN Xiao-hu , SHEN Zhen-zhong(College of Water Conservancy and Hydropower Engineering , Hohai University , Nanjing 210098 , China)
Abstract : An introduction is given to the basic principle of moving least square method(MLSM) and current situation of research on the element-free method(EFM). The steps for EFM to realize field simulation are summarized , and the global equilibrium equations of EFM are derived for simulating the stress field , seepage field , and temperature field . Moreover , the methods to deal with the boundary constraint conditions , free surface iteration , and so on are introduced , and the steps for EFM to simulate crack propagation are also explained . Finally , the advantages and disadvantages of EFM in practical application are pointed out , and some problems needed for further study are proposed .
Key words : element-free method(EFM) ; moving least square method(MLSM) ; variational principle ; field problem

随着计算机科学和软件技术的发展 , 数值计算在工程中的应用日显重要和有效。有限元方法是当前应用最为广泛的数值分析方法之一 , 但有限元法由于其自身的一些缺点在工程应用中仍然面临一些困难 , 例如某些计算结果不连续 , 结构开裂计算中难于重构网格等。基于滑动最小二乘近似的无单元法^[1-2]摆脱了有限元中单元的限制 , 可以根据需要任意布置节点 , 前处理简单 , 并且能得到较高的计算精度。

目前无单元法的应用研究正向着更深更广的方向发展。丁丽宏等^[3]在广义塑性力学中应用无单元法计算了土体在均布荷载和偏荷载共同作用下的弹塑性变形 ; 龙述尧等^[4]用无单元法解决弹塑性问题 ; 介玉新等^[5]将无单元法与非线性有限元耦合应用于面板堆石坝的应力应变计算 , 在面板和防渗墙等结构上布置无单元节点 , 避免了有限元计算网格划分长宽比例过大的缺陷 ; 陈虹等^[6]通过引入滑动最小二乘法和有限差分法 , 得到水动力学无单元算法并应用于复杂边界的河道水流运动方程 ; 胡德安^[7]采用了增量和修正的 Newton-Raphson 迭代分析的方

法 , 并在整个分析过程中所有变量的表达格式都采用全拉格朗日格式 , 从而实现了用无单元法求解几何非线性问题 ; 胡云进、周维垣等^[8-9]编制了三维无单元程序 , 并能够用于模拟拱坝三维开裂问题。

本文对无单元法的基本理论及其对工程中常见的应力场、渗流场和温度场的模拟进行阐述和评价 , 说明无单元法广阔的应用前景。

1 滑动最小二乘法

国际上用“ element-free ”或“ meshless ”统称那些只取节点而不必生成单元网格的各种算法。Atluri 总结了几种主要算法 : 光滑微湍水动力算法、有限点法、单位分解法、无单元 Galerkin 法、弥散单元法、局部 P 无网格法、再生核微团法、局部边界积分方程法^[10] , 其中应用较多且较成熟的是无单元 Galerkin 法。

无单元 Galerkin 法采用最小二乘逼近 , 这里考虑二维情况。设场函数为 $u(x)$, 其中 $x = (x, y)$ 为场点 , 给定 $u(x)$ 在 n 个节点上的值 , 即

$$u(x_i) = u_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{1}$$

则使用滑动最小二乘法可确定 $u(x)$ 的一个近似函数

$$Gu(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) a_j(x) = p^T(x) a(x) \quad (2)$$

式中 $a(x)$ 为 m 维系数向量 $p(x)$ 为 m 维基向量。则近似函数 $Gu(x)$ 在这些节点处的误差加权平方和为 $J(x) = \sum_{i=1}^n w_i(x) [p^T(x_i) a(x) - u_i]^2$, 其中 $w_i(x)$ 为在节点 x_i 处的权函数。对 $J(x)$ 求极值, 即可以得到 $a(x)$ 的表达式:

$$a(x) = A^{-1}(x) B(x) u \quad (3)$$

其中 $A(x) = \sum_{i=1}^n w_i(x) p(x_i) p^T(x_i)$
 $B(x) = [w_1(x) p(x_1) \dots w_n(x) p(x_n)]$
 将式(3)代入式(1), 则近似函数 $Gu(x)$ 又可以写成

$$Gu(x) = \sum_{i=1}^n n_i(x) u_i \quad (4)$$

其中 $n_i(x)$ 是节点的形函数, 可表示为

$$n_i(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) [A^{-1}(x) B(x)]_{ji}$$

利用以上近似场函数, 就可以应用无单元法对工程中常见的场问题进行离散化计算。无单元 Galerkin 法解决场问题的一般步骤如下: ①根据具体问题的平衡方程, 利用变分原理得到无单元法整体平衡方程, 利用上述最小二乘拟合可以将场函数表示成结点未知量和形函数的关系式, 这样场函数对坐标的偏导数就可以表示成形函数对坐标的偏导数, 积分式采用高斯积分法计算。②在整个区域布置节点, 并划分积分子域, 根据节点疏密确定影响半径。③在所有高斯点上循环集成整体平衡方程组, 并求解。

2 工程应用及评价

2.1 模拟应力场

2.1.1 实现方法

以线弹性问题为例, 设弹性体域为 Ω , 力边界为 Γ_l , 位移边界为 Γ_u , 则平衡方程为

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + \bar{f}_i = 0 & \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ \sigma_{ij} n_j - \bar{t}_i = 0 & \text{在 } \Gamma_l \text{ 上} \\ u_i = \bar{u}_i & \text{在 } \Gamma_u \text{ 上} \end{cases} \quad (5)$$

式中 σ_{ij} 为应力张量 $\bar{f}_i$ 为体力 $\bar{t}_i$ 为面力 $\bar{u}_i$ 为边界位移 n_j 为边界法向量。

考虑到滑动最小二乘拟合不满足插值条件, 所以对位移边界条件需要特殊处理。采用罚函数法, 即在位移边界上作用刚度很大的弹簧, 并将已知位移作为该弹簧的初始拉伸量^[11-12]。其中罚参数的物理意义就是弹簧刚度, 为 $k = \frac{c(1-\mu)}{b(1+\mu)(1-2\mu)} E$ 。

式中 c 为常数, 可取 $c = 10 \sim 100$; $b = \min d_n, d_n$ 为节点间距; μ 和 E 分别为材料的泊松比和弹性模量。

根据变分原理对式(5)的泛函求极值, 可得整体平衡方程

$$Ku = f \quad (6)$$

式中 u 为未知位移列阵 K 为劲度矩阵 f 为荷载矩阵。 K 和 f 中的元素如下:

$$\begin{aligned} K_{ij} = & \iint_{\Omega} B_i^T(x) D B_j(x) d\Omega + \int_{\Gamma_u} k N_i^T(x) R N_j(x) d\Gamma + \\ & \sum_{m=1}^{n_u} k N_i^T(x_m^u) R N_j(x_m^u) \\ f_i = & - \iint_{\Omega} B_i^T(x) \sigma^{(0)}(x) d\Omega + \iint_{\Omega} N_i^T(x) \bar{f}(x) d\Omega + \\ & \int_{\Gamma_l} N_i^T(x) \bar{t}(x) d\Gamma + \int_{\Gamma_u} k \bar{u}_i(x) N_i^T(x) R d\Gamma + \\ & \sum_{m=1}^{n_u} k \bar{u}_{\theta m}(x_m^u) N_i^T(x_m^u) R + \sum_{j=1}^{n_t} N_i^T(x_j^t) \bar{T}(x_j^t) \\ & (i, j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

式中 $N_i(x)$ 为形函数矩阵 $B_i(x)$ 为几何矩阵 D 为弹性矩阵 k 为用于处理边界条件的罚参数; $\sigma^{(0)}(x)$ 为初应力 $\bar{f}(x)$ 为体力 $\bar{t}(x)$ 为面力 $\bar{T}(x_j^t)$ 为集中力 $\bar{u}_i(x)$ 为面位移约束 $\bar{u}_{\theta m}(x_m^u)$ 为点位移约束 R 和 r 为相应转换矩阵。

将计算域划分为若干个与节点相互独立的积分子域, 每个子域上采用高斯积分。设通过子域最后产生全域上的 n_G 个高斯点, 每个高斯点积分权为 w_{Gi} , 则任一函数 $f(x, y)$ 在域内积分为

$$\iint_{\Omega} f(x, y) d\Omega = \sum_{i=1}^{n_G} w_{Gi} f(x_i, y_i)$$

2.1.2 应用评价

无单元法采用最小二乘法产生的光滑函数近似场函数, 避免了网格的生成, 不仅大大简化了前处理的过程, 也提高了计算精度, 克服了有限元计算位移场时得到的应力、应变不连续的问题, 在模拟薄层结构时也比有限元方便, 譬如面板堆石坝中的面板、防渗墙以及节理岩体等, 可以避免网格长宽比例过大的问题, 从而改善计算精度^[5]; 在应力集中的地方可以很方便地加密节点。

无单元在模拟应力场时, 仍有一些问题需要解决。

a. 目前的无单元法研究以二维情况为主, 而无单元法要体现前后处理简便的优势, 很多研究成果必须在三维问题中应用, 这样在模拟复杂的工程问题时, 在前后处理时间上才会比有限元法节省得多, 但三维情况下边界条件的处理、计算效率的提高等问题亟待解决。

b. 以上推导是建立在线弹性基础上的,无单元法还需要在各种非线性问题上有进一步的应用,特别是在材料非线性上,这样才可以对土石坝等材料非线性结构进行分析。

c. 无单元法对位移边界的处理还有待于进一步完善。目前应用较多的是上述所推导的罚函数法,这种方法的优点主要是使集成的刚度矩阵具有对称正定性。其他无网格方法中处理边界的方法还有 Lagrange 乘子法、与有限元耦合、采用奇异的权函数等。目前看来,采用奇异权函数有望在这方面取得较大突破,但其实际应用比较复杂^[13]。

d. 无单元法可以很方便地任意加密节点,但若相邻区域的节点密度差别太大则会导致两区域节点的影响半径相差太大,使计算结果出现较大误差^[14]。这个问题可以通过渐变节点密度、界面耦合以及采用自适应影响半径等方法解决。

2.2 模拟渗流场

2.2.1 实现方法

对于二维均质饱和渗流问题,不考虑内源 Q ,可得渗流基本微分方程^[15-17]:

$$k_x \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + k_z \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0 \quad (7)$$

其边界条件一般包括两类边界。第一类边界为 $H = H_B$,第二类边界为 $k_x \frac{\partial H}{\partial x} l_x + k_y \frac{\partial H}{\partial z} l_z + q = 0$ 。根据变分原理,对式(7)的泛函求极值得^[18-21]

$$\iint_{\Omega} \left[k_x \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial}{\partial H_i} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right) + k_z \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial}{\partial H_i} \left(\frac{\partial H}{\partial z} \right) \right] d\Omega + \int_{\Gamma_2} q \frac{\partial H}{\partial H_i} d\Gamma = 0 \quad (8)$$

由无单元法可知水头场函数为 $H = \bar{N}H = n_1 H_1 + \dots + n_n H_n$,代入整理后可得整体平衡方程为

$$KH + F = 0 \quad (9)$$

其中 H 为未知水头列阵, K 和 F 中的元素为

$$K_{ij} = \sum \left[\iint_{\Omega_k} \left(k_x \frac{\partial n_i}{\partial x} \frac{\partial n_j}{\partial x} + k_z \frac{\partial n_i}{\partial z} \frac{\partial n_j}{\partial z} \right) d\Omega \right]$$

$$F_i = \int_{\Gamma_2} q n_i d\Gamma \quad (k = 1, \dots, n)$$

式中: n 为积分网格数目; i, j 为节点号。

对那些有自由面穿过的积分子域,采用无单元法时,并不需要对积分网格作任何的处理。在求渗流系数矩阵式(9)时,将此子域内的函数 $\frac{\partial n_i}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial n_i}{\partial z}$ 看作一个分段分布的函数,并且在渗流域之外函数值为零。因此,积分网格可以始终保持不变。

与有限元法比较,无单元法在求解流量时比较灵活。有限元法一般将单元边长中点的连线作为过

流断面,而无单元法中可自由地确定。

采用一维高斯积分来计算渗流量,即 $q = \int_L v_n dL$,其中 v_n 是 L 的法向流速,其分量 $v_x = -k_x \left(\frac{\partial n_1}{\partial x} H_1 + \dots + \frac{\partial n_n}{\partial x} H_n \right)$, $v_z = -k_z \left(\frac{\partial n_1}{\partial z} H_1 + \dots + \frac{\partial n_n}{\partial z} H_n \right)$ 。

2.2.2 应用情况

无单元法在应用于渗流场分析时体现了一定的优势。①求解有自由面的渗流场时,由于积分子域和节点相互独立,因此可以实现真正的网格固定,避免了对有自由面穿越的子域的重新处理,可根据需要灵活地增加、移动和减少节点^[22],从而实现自由面的迭代。②无单元法提供了全域连续且高阶可导的场函数,因此可以方便地求解流量和各点的流速,而不需要进行后处理修匀,不存在有限元法中的协调问题^[21]。③由于无单元法布置节点的灵活性,在迭代自由面时不会出现有限元中的网格畸变现象,因此用无单元法模拟有自由面的渗流场有其独特的优势。

无单元法模拟渗流场的研究刚刚起步,还很不完善。①无压渗流场自由面的确定是关键,由于无单元法不受网格限制的特点,使其在处理自由面迭代问题上比有限元法简单,但要用无单元法准确确定自由面还有待于进一步研究。②用无单元法计算非稳定渗流场在理论上是可行的,但随着时间变化引起渗流域不断变化,这对无单元法的计算效率提出了更高的要求,实现对非稳定渗流场的模拟应当是无单元法在渗流场中的进一步应用。

2.3 模拟温度场

对于内部无热源的平面稳定温度场,设其温度函数为 $T(x, y)$ ^[23-24],则基本方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 & \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ T = \bar{T} & \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上} \\ -K \frac{\partial T}{\partial h} = \lambda(T - T_f) & \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上} \end{cases} \quad (10)$$

式中: Ω 为一平面区域; Γ_1 和 Γ_2 分别为 Ω 的第一类边界和第二类边界, Γ_1 和 Γ_2 构成 Ω 的整个边界曲线; K 为材料热传导系数; λ 为热交换系数; T_f 为周围介质的温度^[25-26]。

用罚函数法引入温度边界条件,使方程组的系数矩阵对称正定,易于求解^[27]。引入罚因子 α ,并取较大值。根据变分原理,得到稳定温度场平衡方程如下:

$$(K_T + Q_T + P_T)\delta = f_T + q_T \quad (11)$$

其中 $K_{T_{ij}} = \iint_{\Omega} (n_{i,x} n_{j,x} + n_{i,y} n_{j,y}) \lambda dx dy$

$$Q_{T_{ij}} = \alpha \int_{\Gamma_1} n_i n_j ds$$

$$P_{T_{ij}} = \int_{\Gamma_2} n_i n_j ds$$

$$f_{T_i} = \alpha \int_{\Gamma_1} n_i \bar{T} ds$$

$$q_{T_i} = \lambda \int_{\Gamma_1} n_i T_j ds$$

$$\delta = (T_1, \dots, T_n)^T$$

式中: δ 为节点处的温度列阵。

目前用无单元法模拟温度场的研究较为少见, 秦雅菲等通过算例与有限元法的解答进行比较, 结果表明, 无单元法解决平面稳态温度场的精度是令人满意的, 其用于解决平面稳态温度场是合理可行的^[27]。

2.4 追踪裂纹开展

追踪裂纹开展是岩土工程和水利工程中最体现无单元优势的应用。无单元法摆脱了单元的限制, 在模拟裂纹开展中无需重构网格, 所以特别方便。

王国庆^[28]、寇晓东等^[29]在考虑不连续面的张拉破坏准则和剪切破坏准则的前提下用无单元法实现了不连续面的非线性迭代计算, 并提出了能量释放率的修正 J 积分表示形式, 在此基础上, 研究了利用附加场同时计算 I、II 型应力强度因子的方法, 并将环绕裂尖的线积分转换成面积分形式, 减小了算法对积分路径的敏感性。曹国金^[30]采用裂尖能量释放过程和微小步长扩展方法模拟准静态裂纹扩展, 探讨了用无单元 Galerkin 法模拟裂纹等非连续面接触问题。无单元法模拟裂纹开展的基本步骤如下^[29, 31]。①与无单元大部分区域一样, 在裂纹面和裂尖处生成节点并划分积分子域。②对每个高斯点循环, 集成考虑不连续面(裂纹面)的整体平衡方程组。③解平衡方程组, 得到节点位移、应力、应变等。④用断裂力学理论以及上一步得到的应力应变场求解裂尖处的应力强度因子。⑤判断裂纹是否开展。如果开展, 计算开裂步长和开裂方向, 调整节点和高斯点, 重复第二步到第五步, 如果停止开展则输出结果, 程序运行完毕。

清华大学周维垣等^[9]采用可视准则处理不连续面对积分点影响域的影响, 实现对实际水利工程中断层、宏观裂纹等不连续情况的模拟, 编制了无单元 Galerkin 法的三维计算程序, 并用以分析拉西瓦水电工程拱坝-地基系统模型, 计算结果反映了拱坝在水荷载作用下的位移分布规律。这说明无单元法在追踪裂纹开展方面比有限单元法更具有工程实用性。

目前无单元法对裂纹开展的模拟还仅限于线弹

性问题, 以上步骤也仅是对准静态裂纹开展的模拟, 关于弹塑性问题的开裂以及三维动态裂纹开展等问题将是进一步研究的课题。

3 结 语

a. 无单元法以其独特的优点, 解决了传统数值方法解决得不太成功的一些问题: ①无单元法只需节点信息, 因此前后处理上比有限元简便得多。②无单元 Galerkin 法采用最小二乘法逼近, 解答自然地具有高次连续性, 无需进行应力修匀等后处理, 并能很好地反应解答的局部高梯度分布情况^[32]。③由于摆脱了单元的限制, 在模拟薄层节理结构、裂纹开展以及不定边界或可动边界时^[33]可以避免有限元计算中经常出现的网格畸变现象, 能够很方便地在计算过程中不断调整节点。

b. 无单元法是一种新兴的数值方法, 无论在理论上还是应用上还有待于进一步研究。①无单元法通过采用最小二乘法达到较高的计算精度, 但同时也降低了计算效率。如何提高无单元法的计算效率是将无单元法推广到三维情况时必须解决的问题。②实际岩土工程和水利工程中有大量的结构都是非线性的, 无单元法对非线性问题的模拟有待于进一步开发。③无单元法作为新兴的数值方法, 无论是在理论上还是应用上都远没有有限元法成熟, 将无单元法与有限元法等传统数值方法结合将使无单元法的应用变得更加灵活实用。在大部分区域应用有限元法, 而在一些区域如应力集中区、自由面迭代区等应用无单元法, 既可以根据需要提高某些区域的精度, 又可以克服无单元法计算效率低的缺点。④目前无单元法模拟裂纹时大多模拟单条裂纹开展, 而实际问题中有很多几条裂纹纵横交错的情况, 过去有限元由于网格的限制无暇顾及多条裂缝交叉开展问题, 无单元法凭借其不受单元约束的独特优势, 必将在追踪交叉裂纹扩展的问题上有所作为。⑤本文仅描述了无单元法如何模拟温度场、渗流场, 如果能用无单元法实现应力场、温度场和渗流场的耦合, 便能模拟温度裂缝、裂隙渗流等问题。

参考文献:

- [1] BELYTSCHKO T, LU Y Y, GU L. Element-free Galerkin method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994, 37: 229-256.
- [2] LU Y Y, BELYTSCHKO T, GU L. A new implementation of the element-free Galerkin method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1994, 113: 397-414.
- [3] 丁丽宏, 刘学文, 郑璐石. 基于广义塑性力学的无单元法[J]. 2003, 23(3): 214-216.

[4] 龙述尧,陈莘莘. 弹性力学问题的无单元伽辽金法[J]. 工程力学, 2003, 20(4): 66-70.

[5] 介玉新,高波,李广信. 无单元法在混凝土面板堆石坝应力分析中的应用[J]. 清华大学学报:自然科学版, 2003, 43(8): 1092-1095.

[6] 陈虹,林建华. 用无单元法求解河道水流运动方程[J]. 计算力学学报, 2001, 18(2): 250-252.

[7] 胡德安. 求解几何非线性问题的无单元伽辽金法[D]. 长沙: 湖南大学, 2003.

[8] 胡云进,周维垣,寇晓东. 三维无单元法及其应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(7): 1136-1140.

[9] 周维垣,黄岩松,林鹏. 三维无单元伽辽金法及其在拱坝分析中的应用[J]. 水利学报, 2005, 36(6): 644-649.

[10] BELYTSCHKO T, LU Y Y, GU L. Crack propagation by element-free Galerkin methods[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1995, 51: 295-315.

[11] 周维垣,寇晓东. 无单元法及其工程应用[J]. 力学学报, 1998, 30(2): 193-202.

[12] 周维垣,寇晓东. 无单元法及其在岩土工程中的应用[J]. 岩土工程学报, 1998, 20(1): 5-9.

[13] 曹国金,姜弘道. 无单元法研究和应用现状及动态[J]. 力学进展, 2002, 32(4): 526-534.

[14] 寇晓东. 无单元法追踪结构开裂及拱坝稳定研究[D]. 北京: 清华大学, 1998.

[15] 苑莲菊,李振栓,武胜忠,等. 工程渗流力学及应用[M]. 北京: 中国建材工业出版社, 2001.

[16] 顾慰慈. 渗流计算原理及应用[M]. 北京: 中国建材工业出版社, 2000.

[17] 杜延龄,许国安. 渗流分析的有限元法和电网络法[M]. 北京: 水利水电出版社, 1992.

[18] 党发宁,王晓章,郑忠安,等. 有自由面渗流分析的变单元渗透系数法[J]. 西北水力发电, 2004, 20(1): 1-3.

[19] 葛锦宏,李广信,介玉新. 无单元法在有自由面渗流计算中的应用[J]. 计算力学学报, 2004, 20(2): 241-243.

[20] 曾清红,卢德唐,齐岩,等. 无网格方法求解稳定渗流问题[J]. 计算力学学报, 2003, 20(4): 440-445.

[21] 梁志松,李扬红,吴煌峰. 水工闸基防渗有限元分析与研究[J]. 土工基础, 2004, 18(2): 33-36.

[22] 李广信,葛锦宏,介玉新. 有自由面渗流的无单元法[J]. 清华大学学报:自然科学版, 2002, 42(11): 1552-1555.

[23] 刘兴法. 混凝土结构的温度应力分析[M]. 北京: 人民交通出版社, 1991.

[24] 朱伯芳,王同生,丁宝瑛,等. 水工混凝土结构的温度应力与温度控制[M]. 北京: 水利水电出版社, 1976.

[25] 李朝红,徐光兴,董淑温. 砌体结构温度应力的有限元分析[J]. 石家庄铁道学院学报, 2004, 17(4): 42-44.

[26] 夏世法. 三峡工程大洞径、厚衬砌混凝土施工期监测及温度徐变应力研究[D]. 南京: 河海大学, 2004.

[27] 秦雅菲,张伟星. 无单元法在求解平面稳态温度场中的应用[J]. 青岛建筑工程学院学报, 2003, 24(1): 79-82.

[28] 王国庆. 岩体力学劈裂试验及裂纹扩展的无单元法计算[M]. 南京: 河海大学, 2004.

[29] 寇晓东,杨若琼,沈大利,等. 无单元法在小湾拱坝开裂计算中的应用[J]. 云南水力发电, 2000, 16(1): 71-76.

[30] 曹国金. 无单元的进展、改进及其应用[D]. 南京: 河海大学, 2003.

[31] 胡云进,周维垣,林鹏. 无单元法在三维断裂力学中的应用[J]. 岩土力学, 2003, 24(增刊): 21-24.

[32] 周小平,周瑞忠. 无单元法研究现状及展望[J]. 工程力学, 2005, 22(1): 12-20.

[33] 唐少武,冯振兴. 关于无单元法的若干注记[J]. 力学进展, 2003, 33(4): 560-561.

(收稿日期 2005-12-02 编辑:高建群)

(上接第 89 页)

[26] 高正夏,李景波,刘震,等. 宁夏青铜峡河西灌区地下水调控标准研究(一)[J]. 水资源保护, 2003, 4(4): 15-17.

[27] 高正夏. 宁夏青铜峡河西灌区灌排模式对比研究(二)[J]. 水资源保护, 2003, 1(1): 32-35.

[28] 王文科,韩锦萍,赵彦琦. 银川平原水资源优化配置研究[J]. 资源科学, 2004, 26(2): 36-45.

[29] 陈聆东,张晓燕. 宁夏灌溉回归水再利用的评价[J]. 宁夏农林科技, 2000, 1(1): 34-36.

[30] 马云瑞,张益民,苗济文,等. 宁夏灌溉回归水开发再利用的评价[J]. 自然资源学报, 1997, 12(2): 133-138.

[31] 王杰,苗济文,张益民,等. 银川灌区灌溉回归水质量评价[J]. 农业环境保护, 1997, 16(4): 145-148.

[32] 马云瑞,苗济文,张益民,等. 宁夏灌溉回归水对土壤的影响及改良措施[J]. 宁夏农林科技, 1998, 2(2): 18-22.

[33] 马云瑞,苗济文,张益民,等. 宁夏低矿化度回归水灌溉对土壤盐碱化的影响[J]. 农业环境保护, 1998, 17(6): 241-244.

[34] 孙正风,王金保,马京军. 宁夏污水灌溉对土壤和农产品质量的影响[J]. 宁夏农林科技, 1999, 4(4): 7-11.

[35] 雍富强,刘学军. 宁夏引黄灌区沟水利用研究[J]. 水资源保护, 2004, 3(3): 17-39.

[36] 马云瑞,苗济文,张益民,等. 宁夏银北地区土壤盐渍化综合治理[J]. 土壤通报, 1996, 27(6): 253-256.

[37] 姚予龙. 宁夏引黄灌区低洼盐碱荒地的开发利用方向研究[J]. 自然资源学报, 1995, 10(4): 364-371.

[38] 李明,陈静,陈兴会,等. 盐荒地旱作改良综合农艺措施抑盐效果探讨[J]. 土壤通报, 2001, 32(2): 60-65.

[39] 刘团结. 银北灌区地下水利用途径的试验分析[J]. 宁夏农林科技, 2004, 4(4): 10-11.

[40] 许迪,王少丽,蔡林根,等. 利用 NDVI 指数识别作物及土壤盐碱分布的应用研究[J]. 灌溉排水学报, 2003, 22(6): 5-8.

[41] 杨劲松. 土壤盐渍化研究展望[J]. 土壤, 1995, 1(1): 23-27.

[42] 汪林,甘泓,汪珊,等. 宁夏引黄灌区水盐循环演化与调控[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2003.

(收稿日期 2005-07-05 编辑:高建群)