

小振幅驻波的数值计算

汪迎春¹, 汪德¹, 崔海滨²

(1. 河海大学环境科学与工程学院, 江苏 南京 210098; 2. 临沂水文水资源勘测局, 山东 临沂 276002)

摘要 将快速行进法和源点扫描法的思想结合起来, 改进了非结构网格下 Level Set 方法的实现策略, 结合人工压缩法, 求解小振幅驻波问题。对 2 种不同波幅的驻波分别进行了计算, 结果和理论吻合较好。计算中 Level Set 策略很稳定, 没有产生数值性的破碎, 表明改进后的 Level Set 方法可用于不同幅度振幅波问题的计算。

关键词 N-S 方程; 驻波; Level Set; 人工压缩

中图分类号 TV131.4; Q353.2 **文献标识码** A **文章编号** 1006-764X(2007)01-0014-03

Numerical calculation of small amplitude standing waves/WANG Ying-chun¹, WANG De-guan¹, CUI Hai-bin² (1. College of Environmental Science and Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China; 2. Linyi Hydrology and Water Resources Survey Bureau, Linyi 276002, China)

Abstract : The fast-marching method was combined with the source-scanning method to modify the scheme for the Level Set method in unstructured grids, and the problem of small amplitude standing waves was solved by its combination with artificial compression method. Two kinds of standing waves with different amplitudes were calculated and the calculated result was in good agreement with that from theoretical analysis. The modified scheme for the Level Set method is stable with no numerical fragment induced; therefore, the improved Level Set method can be applied to calculating standing waves with different amplitudes.

Key words : N-S equation; standing wave; Level Set; artificial compression

湖泊中由于风浪或气压的迅速改变会导致水位有节奏的变化, 这种波漾也称为驻波。小振幅波理论对波浪作线性化假设, 在小振幅波条件下是符合实际规律的。本文通过直接数值求解 N-S 方程, 抛弃线性化假设, 采用 Level Set 方法处理自由面问题, 对小振幅驻波问题进行了计算。

1 控制方程

不可压缩流体运动的连续方程和动量方程为

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial (\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_j u_i)}{\partial x_j} = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \tag{2}$$

写成通用微分方程的积分形式

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \phi dV + \int_A \rho \phi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA = \int_A \Gamma \text{grad} \phi \mathbf{n} dA + \int_V S_\phi dV \tag{3}$$

式中: ρ 为流体密度; ϕ 为通用变量, 如速度等; Γ 为扩散系数; S_ϕ 为源项; $\mathbf{n}$ 为单元边界 A 的外法向单位向量; dA 为面积分微元; dV 为体积分微元。方程

采用非结构同位网格, 物理变量布置在单元中心, 用有限体积法离散。

2 人工压缩法

对不可压缩流体 N-S 速度压力耦合方程的求解方法有很多, 本文采用人工压缩法^[1-3]。人工压缩法形式简单, 同时可以获得很高的精度。伪时间导数项用一阶向后差分, 物理时间项用二阶向后差分, 对流项采用二阶迎风格式, 扩散项采用中心差分格式。

3 Level Set 方法

对于两相流界面的追踪, 采用 Level Set 方法^[4]。Level Set 方法把随时间运动的界面看作某个函数 $\phi(x, t)$ 的零等值面, 一般取 $\phi(x, t)$ 为 x 点到界面 $\Gamma(0)$ 的符号距离。

$$\phi(x, 0) = \begin{cases} d(x, \Gamma(0)) & x \in \Omega_1 \\ 0 & x \in \Gamma(0) \\ -d(x, \Gamma(0)) & x \in \Omega_2 \end{cases} \tag{4}$$

式中: $d(x, \Gamma(0))$ 表示 x 到 $\Gamma(0)$ 的距离, $\Omega = \Omega_1 \cup \Gamma \cup \Omega_2$ 。

作者简介: 汪迎春(1976—), 男, 安徽桐城人, 博士研究生, 从事计算流体力学研究。E-mail: wangyingch@163.com

在任意时刻 t 对于活动界面 $\Gamma(t)$ 上的任意点 x , $\phi(x, t) = 0$ 从而有

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + V \cdot \nabla \phi = 0, V = \frac{dx}{dt} \quad (5)$$

方程为 Level Set 方程。Level Set 函数的单位外法向以及运动界面的曲率分别为

$$n = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \Big|_{\phi=0}, k = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) \Big|_{\phi=0} \quad (6)$$

根据式(5)求得的 $\phi(x, t)$ 并不满足符号距离函数性质, 为了保持 $\phi(x, t)$ 的符号距离性质, 在每个计算步后需要重新初始化, 通过求解初值问题的稳定解来实现。

$$\begin{cases} \phi_\tau = \text{sign}(\phi_0)(1 - |\nabla \phi|) \\ \phi(x, 0) = \phi_0 \end{cases} \quad (7)$$

式中 τ 为虚时间。符号函数 $\text{sign}(\phi)$ 光滑化为

$$\text{sign}(\phi) = \frac{\phi}{\sqrt{\phi^2 + \epsilon^2}} \quad (8)$$

重新初始化方程的求解采用一阶、单调的 Godunov 格式。

对 Level Set 方程时间项采用三阶 TVD-Runge-Kutta 格式, 空间项用 QUICK 格式。求得 ϕ 后, 可以根据 ϕ 确立界面形状及流体分布, 并可计算出各单元的相流体的体积份额及密度。界面两侧切向流速会出现反向的情况, 存在很强的间断, 对于界面附近物理量的处理采用了一阶的“isobaric fix”技术的 ghost 方法^[5]。

Level Set 实现策略: 本文将快速行进法^[6]和源点扫描法^[7]的思想结合起来运用到非结构网格下的 Level Set 的求解。

定义: ①种子点。选择界面 Γ 附近的网格点为种子点。②窄带点。推进算法中波面附近区域的点为窄带点。③远离点。除了种子点和窄带点以外, 所有其他的网格点为远离点, $d = \infty$ 。④源点。源点是 Γ 上距离待考察网格点最近的点, 设网格 P 点基于 Γ 的源点为 P_s , 则 P 点到 P_s 点的距离就是 P 点的距离函数值。

符号距离函数值的信息总是从距离小的地方向大的地方传递, Level Set 求解策略可先根据方程(5)精确求出界面 Γ 附近网格单元的 $\phi(x, t)$, 再根据快速行进法和源点扫描法的思想向界面两侧逐步推进, 求出整个域上的 ϕ 分布。

计算策略如下:

a. 初始化。根据 $\phi(x, 0)$ 生成网格点的距离符号表(正值为 1, 负值为 -1), 选择界面 Γ 附近的网格点为种子点, 计算种子点到 Γ 的准确距离 d 以及相应的源点 P_s , 并将最近点的 d 和源点 P_s 保存, 将

种子点标记为 visited, 其他点标记为 unvisited。将种子点集设为初始窄带点集。

b. 循环。①开始循环, 设点 P 是窄带中具有最小距离 d 的点。②标识点 P 为 visited, 并从窄带中删除。③标识点 P 的邻单元网格点 E 。如果网格点 E 为 visited, 则不改变距离; 如果网格点 E 为窄带点, 则更新 E 点的距离 d 及其源点; 如果网格点 E 为远离点, 则标识 E 为窄带点, 同时更新 E 点的距离 d 及其源点。更新网格点 E 的距离函数值及其源点的方法如下: (a) 计算 E 点与每个邻单元网格点 P_i 的源点 P_{is} 的距离 $d_i = |E - P_{is}|$; (b) 如果 $\min\{d_i\} < d(E)$, 更新 $d(E) = \min\{d_i\}$, 则设网格点 P_i 的源点为 E 的源点。如果 $\min\{d_i\} > d(E)$, 并且 E 点为 visited, 标记 E 点为 unvisited。④如果窄带点集为空或已到边界, 则结束循环, 否则跳到①。

c. 重新初始化。界面附近域以外的网格点距离值乘以距离符号即得相应网格点的符号距离函数, 求得后可按方程(7)重新初始化。

4 算 例

驻波问题定义: 如图 1 所示, 计算区域为一正方形区域, 边长为 20 m。水面平衡位置 $y = 10$ m, 边界均为对称边界, 不考虑水的黏性, 水的运动黏性系数为 0。初始水深为

$$h(x, 0) = D + \frac{H}{2} \cos \frac{\pi x}{L} \quad (9)$$

式中: D 为水体的平均深度, $D = 10$ m; H 为波高; L 为驻波的波长, $L = 20$ m。驻波是由 2 组振幅、波长及周期相同而传播方向相反的行进波叠加而成。波的相速度不变, 波高为原来波高的 2 倍, 相邻 2 个波节间的水平距离为半个波长。

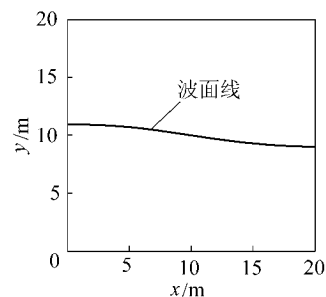


图 1 驻波问题定义

根据小振幅波理论:

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda}} \quad (10)$$

式中: c 为相速度; h 为水深; λ 为波长, $\lambda = 2L$; g 为重力加速度。理论计算得: $c = 7.566$ m/s, 半周期 $T = \frac{\lambda/2}{c} = 2.64$ s。

本文对波高为 1 m(图 2(a))和 2 m(图 2(b))的两种情形分别进行了计算,数值计算的结果见图 3~5。从图中可见,半周期 $T = 2.65$ s 和理论计算公式结果一致。

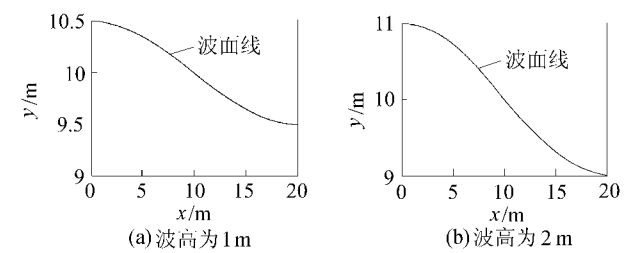


图 2 初始波面形态定义

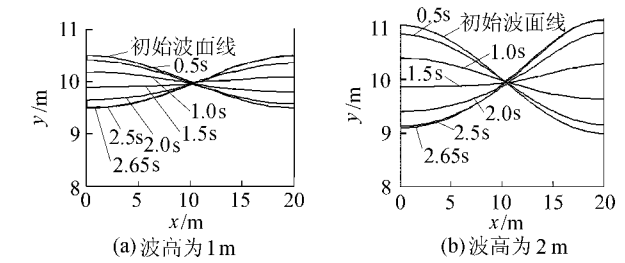


图 3 不同时刻的波面线

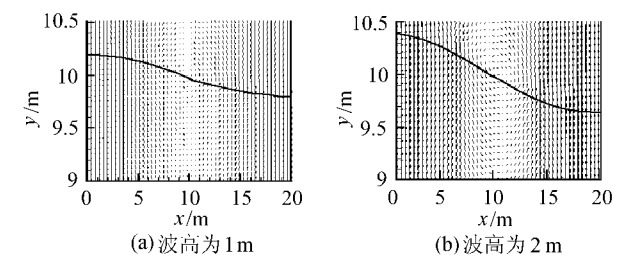


图 4 $t = 1$ s 时流速分布

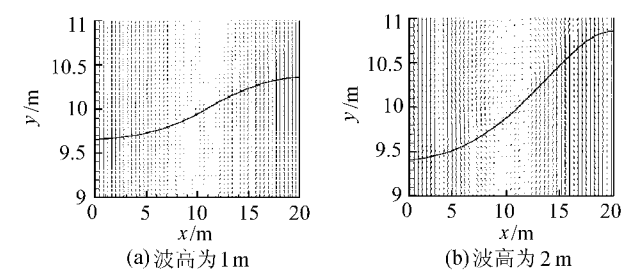


图 5 $t = 2$ s 时流速分布

5 结 论

数值计算的驻波周期和理论公式是一致的,从流场图可看出在波腹位置水流只有上下运动,波节处没有运动,这些都是完全符合驻波规律的。但随着波幅的增大,波线移动到右边界时,计算的波面线有一点上移的趋势。计算过程中没有产生数值性的破碎,稳定可靠。本文的方法既可用于小振幅波也可用于有限振幅波的计算以及其他的自由面问题。

参考文献:

- [1] 薛具奎,赵金保.人工压缩法数值模拟非定常不可压缩热对流流场[J].西北师范大学学报:自然科学版,1998,34(2):32-37.
- [2] 陈传淡,守恒双曲型方程式激波计算区域分解法中的追踪及人工压缩方法[J].厦门大学学报:自然科学版,1999,38(3):329-333.
- [3] 朱自强,贾剑波.三角翼大迎角不可压粘流的数值模拟[J].力学学报,1996,28(6):736-740.
- [4] OSHER S, SETHIAN J A. Fronts propagating with curvature dependent speed: algorithms based on Hamilton Jacobi formulations[J]. J Comp Phys, 1988, 79: 12-49.
- [5] 刘儒勋,舒其望.计算流体力学的若干新方法[M].北京:科学出版社,2003:216-220.
- [6] SETHIAN J A. Fast marching methods[J]. SIAM Review, 1999, 41(2):199-235.
- [7] TSAI Y H. Rapid and accurate computation of the distance function using grids[J]. Journal of Computational Physics, 2002, 178(1):175-195.

(收稿日期 2006-09-15 编辑 熊水斌)

· 简讯 ·

2007 重大水利水电科技前沿研讨会 将在南京召开

为了探讨 21 世纪我国水利水电建设中存在的主要问题,中国工程院土木、水利和建筑工程学部将于 2007 年 11 月 10~12 日在南京河海大学召开“2007 重大水利水电科技前沿研讨会”,研讨水利水电建设中的前沿科学问题和热点问题,以促进水利工程学科的发展和工程技术的创新。会议主要议题包括:①21 世纪大型水利水电工程建设的主要任务和其中的关键科学问题;②大型水利工程的安全和防灾减灾;③大型病险水库综合整治的关键技术;④大型水利工程对生态、环境和防洪的影响及其对策;⑤新世纪中国水资源和水能资源存在的问题和对策;⑥国家自然科学基金重点基金和“973”课题研讨。会议由河海大学、南京水利科学研究院、水文水资源与水利工程科学国家重点实验室承办,会议期间,中国水利学会将同时在河海大学举办全国水利博士论坛。会议论文将以论文集的形式由国内著名出版社出版。

(本刊编辑部供稿)