

资源约束下 PERT 施工进度计划的优化

刘煜明¹, 王卓甫¹, 张益民²

(1. 河海大学工程管理研究所, 江苏 南京 210098; 2. 南京港口建设指挥部, 江苏 南京 210011)

摘要 针对资源限制下 PERT 施工进度计划的工期-资源优化问题, 引进评价风险量的关键指标——活动关键度指标(ACI)和重要度指标(CRI), 采用 0-1 整数规划技术, 建立资源配置优化模型以及优化计算方法。运用 Delphi 7.0 和 Lindo 工具, 开发了该方法的应用程序, 并结合实例进行了应用。结果表明, 考虑进度风险因素的优化模型是科学合理的。

关键词 施工进度; PERT; 资源约束; 工期-资源优化; 0-1 整数规划

中图分类号 TU723 **文献标识码** A **文章编号** 1006-7647(2007)01-0027-04

Time-resources tradeoffs of PERT construction schedule under resource constraints//LIU Yu-ming¹, WANG Zhuo-fu¹, ZHANG Yi-min² (1. Project Management Institute, Hohai University, Nanjing 210098, China; 2. Construction Headquarters of Nanjing Harbor Group Company, Nanjing 210011, China)

Abstract: By introduction of two key indexes for risk evaluation, i. e. the activity criticality index (ACI) and cruciality index (CRI) and adoption of 0-1 integer programming algorithm, a resource reallocation model and a calculating method were established for time-resources tradeoffs of PERT resource-constrained scheduling. An application program according to the function of tradeoff algorithm was compiled by use of Delphi 7.0 and Lindo software. Case study shows that the resource reallocation model considering schedule risk factors is reasonable.

Key words: construction schedule; PERT; resource constraint; time-resources tradeoff; 0-1 integer programming

施工进度计划主要是对建设工期计划的细化, 并对相应的资源进行分配、整合与优化, 其中, 在资源供应量受约束的情况下, 通过调整计划, 解决资源需求量和供应量的矛盾并使工期最短, 是人们关注的一个重点。事实上, 在实际施工中, 资源的供应量往往是有限制的, 如施工设备的限制, 库存材料的限制, 工种人员的限制等, 施工进度计划必须在资源约束的条件下安排。此外, 人们在实际施工中发现, 仅以资源约束作为优化施工进度计划的唯一条件是不够的, 特别是对于大中型工程项目, 技术、环境非常复杂, 不确定因素众多, 完全确定的施工进度计划是不存在的。因此, 不确定型(PERT)网络计划时间-资源优化的研究已受到学者们的高度关注。

目前, 国内外关于 PERT 网络计划在资源约束下的优化研究已有较多的成果, 但考虑风险因素对工程项目影响的研究并不多。蔡晨等^[1]提出通过关键链管理来解决 PERT 网络计划的时间-资源问题。Choi 等^[2]提出建立活动持续时间的马尔可夫链, 通过动态规划来解决有限资源的优化问题。Golenko-Ginzburg 等^[3]提出通过求解“背包问题”, 把资源优

先分配给关键概率较大的且工期较长的活动。该方法考虑了风险率的因素, 但忽略了风险损失的影响, 显然并不完善。随着工程项目风险管理理论的不断拓展, 从风险管理的角度研究 PERT 网络计划在资源约束条件下的工期-资源优化问题将对实际施工中编制合理、经济的施工进度计划有重要的指导意义。为此, 本文结合风险量的两个主要因素——风险率和风险损失^[4], 对资源约束下的 PERT 施工进度计划的工期-资源优化问题进行探讨。

1 PERT 进度计划工期-资源优化模型

1.1 模型的基本假设

在经典 PERT 模型的基础上提出本模型的基本假设: ①在网络计划图中, 各活动的持续时间与总工期线性相关; ②完工条件一定, 各活动的完工风险既定, 为一常值; ③各活动的持续时间与资源需求量呈线性关系; ④各活动的资源需求总量固定, 为一常值; ⑤工程项目进行的任意时刻, 各种资源的供应量恒定; ⑥各活动对资源是整合占有的。

1.2 关键指标

工程项目之所以需要进行工期-资源优化, 是因

为某种资源既定的供应量不一定在项目进行的任意时刻都满足需求。对于如何分配资源的问题,则需要制定一种规则,把资源优先分配给对工程进度影响最大的活动或活动集,从而保证工程进度目标的顺利实现。依据风险管理的观点,评价工程项目的影 响程度可用风险量(risk quantification)来描述,其量化标准包括风险率(risk probability)和风险损失值(risk event value),并定义为

$$R = f(p, q) \quad (1)$$

式中: R 为风险量; p 为风险率; q 为风险事件发生对工程项目的影 响程度,即损失值。这就是说,当工程项目进行到面临资源约束的时候,资源的分配规则需要基于风险率和风险损失值来考虑。风险率和风险损失值可分别通过以下两个指标进行测度。

a. 活动关键度指标(activity criticality index, ACI)^[5]。在 PERT 进度计划中,由于考虑各活动持续时间的不确定性,理论上所有线路都有可能成为关键线路。资源是面向活动进行分配的,关键活动(位于关键线路上的活动)应该在资源分配中占优先地位,这是因为从保证工程按时完工的角度上说,关键线路的活动对工期风险的影响最大,组成关键线路的各项活动理应予以足够的重视。既然所有线路都有可能成为关键线路,这说明所有活动都有可能成为关键活动。因此,可用‘活动关键度指标’来描述各活动成为关键活动的频率,亦即活动持续时间正相关于总工期的风险率 p 。根据 ACI 的定义,风险率 p 可用下列方法取得:①确定 PERT 进度计划的关键线路,记录关键活动;②重复① N 次,统计各活动成为关键活动的次数 m ;③统计各活动作为关键活动的频率 $p(i, j)$:

$$p(i, j) = m/N \quad (2)$$

式中: $p(i, j) \in [0, 1]$ 。

b. 重要度指标(cruciality index, CRI)^[5]。在进度计划中,某活动的关键度大并不意味着该活动的风险量较大,也并不意味着整个工程项目不能完工的风险就大。因此,资源的分配除了需要考虑某活动成为关键活动的关键度外,还需要考虑某活动一旦发生意外时对整个工程项目进度的影响和进度的损失。由于施工进度计划不可能反映工程实际施工过程中所发生的损失,在编制施工进度计划的时候,可以通过估计活动的持续时间对工程总工期的敏感度影响来代替风险损失值 q 的估计。根据假设③,活动的持续时间对工程总工期的影响便可用它们的线性相关系数来反映,采用 Williams 提出的‘重要度指标’来表示各活动对工程项目的影 响程度 $q(i, j)$,其计算可通过蒙特卡罗仿真实现。

$$q(i, j) = |\text{Corr}(D_{i,j}, C)| \quad (3)$$

$$\text{Corr}(D_{i,j}, C) = \frac{\text{Cov}(D_{i,j}, C)}{\sigma(D_{i,j})\sigma(C)} \quad (4)$$

$$\text{Cov}(D_{i,j}, C) = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N (D_{i,j,m} - E(D_{i,j})) \cdot (C_m - E(C)) \quad (5)$$

$$E(D_{i,j}) = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N D_{i,j,m} \quad (6)$$

$$E(C) = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N C_m \quad (7)$$

$$\sigma(D_{i,j}) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{m=1}^N (D_{i,j,m} - E(D_{i,j}))^2} \quad (8)$$

$$\sigma(C) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{m=1}^N (C_m - E(C))^2} \quad (9)$$

式中: $q(i, j) \in [0, 1]$; $D_{i,j}$ 为活动 $A(i, j)$ 的持续时间; $D_{i,j,m}$ 为活动 (i, j) 在第 m 次仿真时的持续时间; C 为工程总工期; C_m 为在第 m 次仿真时的工程总工期; $E(D_{i,j})$ 为活动 (i, j) 经 N 次仿真后的期望持续时间; $E(C)$ 为工程总工期经 N 次仿真后的期望值; $\sigma(D_{i,j})$ 为活动 (i, j) 经 N 次仿真后的标准差; $\sigma(C)$ 为经 N 次仿真后的工程总工期的标准差; $\text{Cov}(D_{i,j}, C)$ 为活动 (i, j) 的持续时间与总工期的协方差; $\text{Corr}(D_{i,j}, C)$ 为活动 (i, j) 与总工期的线性相关系数。

考虑活动存在一定的不能完工的风险 P_r ,通过对‘三值法’所求出的活动 (i, j) 期望持续时间 $D_{0,i,j}$ 进行修正,并假设方差 $\sigma_{0,i,j}$ 不变,便可得到基于一定完工风险的活动持续时间 $D_{i,j}$ 。修正方法^[6-7]为

$$D_{0,i,j} = (b + 4c + a)/6 \quad (10)$$

$$\sigma_{0,i,j} = \sqrt{(b - a)^2/36} \quad (11)$$

$$P' = 1 - P_r \quad (12)$$

$$\text{则 } D_{i,j} = \lambda \sigma_{0,i,j} + D_{0,i,j} \quad (13)$$

式中: a, b, c 分别为乐观估计时间、悲观估计时间和最可能估计时间; P' 为 $D_{i,j} > D_{0,i,j}$ 的概率; λ 可由 $1 - P_r$ 的值经查分布表而得。

通过上述步骤,即可求出活动 (i, j) 的重要度指标 $q(i, j)$ 。

1.3 资源优化模型

通过对上述关键指标的设置以及对优化模型的假设,当遇到资源约束的时候,便可依据活动的 ACI 和 CRI 来确定该活动的进行与否。通过启发式算法优化有限资源条件下的时间-资源问题,运算步距为单位工日,故活动对资源仅为占有与不占有两种状态。因此,资源分配模型可简化为一个 0-1 整数规划模型,目标函数为:使得在任意 t 时刻,含有决策

者风险概率偏好程度的组合 $J_{v,t}$ 的风险评价指标函数 $F_{v,t}$ 极大化。这是因为风险量最大的活动组合有必要优先配置资源;而约束函数为在任意 t 时刻多项活动对各种资源的需求量不大于该种资源的供应量。其数学模型为

$$\begin{aligned} \max \{F_{v,t}\} &= \max \left\{ \sum_{v=1}^m \epsilon_{v,i,j} [\omega p_{v,t}(i,j) + (1-\omega) q_{v,t}(i,j)] \right\} \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} \sum_{v=1}^m \epsilon_{v,i,j} r_{k,i,j} \leq R_{k,t} \\ \epsilon_{v,i,j} = \begin{cases} 1 & \text{活动分配到资源} \\ 0 & \text{活动不分配资源} \end{cases} \\ \forall t > 0, \quad 1 \leq k \leq n, \quad 1 \leq v \leq m \\ 1 \leq i < j \leq u, \quad i = 1, 2, 3, \dots, u-1 \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

式中: ω 为决策者对风险概率的偏好程度, $\omega \in [0, 1]$; u 为末节点号; t 为任意时刻; v 为 t 时刻接受分配资源的第 v 项工序; k 为资源的类型; m 为 t 时刻等待分配资源的候选活动(以下简称候选活动)数目; n 为资源类型数目; $r_{k,i,j}$ 为活动 (i,j) 对第 k 种类型资源的需求量; $R_{k,t}$ 为 t 时刻第 k 种资源供应量上限; $\epsilon_{v,i,j}$ 为活动 (i,j) 作为第 v 项候选活动占有资源的状态。式(14)成立的理由为 $p(i,j)$ 和 $q(i,j)$ 的取值范围均为 $[0, 1]$ 且不相相关。通过求解集合 $\{\epsilon_{v,i,j}\}$ 即得到 t 时刻在资源约束条件下最优活动的组合 $C \{U_{v,t}\}$ 。

对于 $r_{k,i,j}$, 由于 PERT 进度计划活动持续时间的不确定性, 活动资源的单位需求量也具有不确定性, 因此 $r_{k,i,j}$ 可表示为活动 (i,j) 对第 k 种资源的需求总量与该活动在每次仿真中的基于一定风险水平的期望持续时间的比值, 即

$$r_{k,i,j} = R_{k,i,j} / E(D_{i,j}) \quad (16)$$

式中: $R_{k,i,j}$ 为活动 (i,j) 对第 k 种资源的需求总量; $E(D_{i,j})$ 为活动 (i,j) 基于一定风险水平 P_r 的期望持续时间。

2 PERT 进度计划工期-资源优化步骤

基于上述原理和方法, PERT 进度计划工期-资源优化的基本步骤如下:

- 根据进度计划图, 分别估计每项活动时间的 a, b, c 的值, 并确定风险概率偏好程度 ω 。
- 确定各种资源的供应量上限 $R_{k,t}$ 和各活动的各种资源需求总量 $R_{k,i,j}$ 。
- 确定仿真次数 N 和风险水平 P_r ; 对网络的活动时间进行抽样模拟, 按照“三点法”计算每次仿真时各活动的持续时间 $D_{0,i,j}$, 根据 P_r 作修正, 得到

$D_{i,j}$, 根据 CPM 网络计划运算规则确定网络的计算工期 $C_g (g = 1, 2, \dots, N)$ 。

- 仿真 N 次后, 统计关键活动的频数、期望总工期 $E(C)$ 及各活动的期望持续时间 $E(D_{i,j})$ 。
- 计算各活动的 $r_{k,i,j}, p(i,j)$ 和 $q(i,j)$ 。
- 从进度计划图的第一个节点开始, 以此向后, 确定“里程碑”。里程碑为某项活动的最早完成时刻 $EF_{i,j}$, 令里程碑时间为 $T(t)$ 。例如, 在 t 时刻存在两项可进行的活动 $A(2,4)$ 和 $A(3,4)$, 里程碑时间为 $T(\min \{t + D_{2-4}, t + D_{3-4}\})$ 。
- 根据 CPM 网络计划的运算规则, 以某一节点为终节点的活动尚未完成, 那么以该节点为始节点的所有活动就不得开始, 那些活动即为非候选活动, 该类活动不可进行; 否则为候选活动, 该类活动可进行。按照里程碑进行时间推进, 当 t 时刻各种类型资源的供应均能满足候选活动对其需求时, 推进到下一个里程碑时间; 否则, 按照资源分配原则进行资源分配, 未经分配资源的活动即为候选活动进入下一里程碑进行判断。
- 时间推进到最后一项活动完成为止, 计算出总工期, 所求总工期即为工期-资源优化后的最短工期, 满足式(14)和式(15)。

3 算 例

基于上述原理, 运用 Delphi7.0 和 Lindo 目标规划软件自行设计了一个应用程序。该程序充分体现了本文所提出的 PERT 进度计划工期-资源优化的思路, 解决了关键指标计算和 0-1 整数规划模型求解的问题。

以图 1 进度计划为例, 说明 PERT 进度计划工期-资源优化的过程。

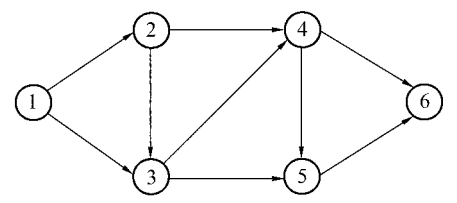


图 1 PERT 进度计划图示例

设定仿真次数 $N = 10\,000$ 次, 风险水平 $P_r = 15\%$, 风险概率偏好程度 $\omega = 0.8$, 人员、材料和机械的日供应量上限为 9 人、10t 和 3 台, 用正态分布对活动的持续时间进行抽样模拟。进度计划各活动的 3 点估计值和各种类型资源情况以及通过仿真后的统计分析得到的各活动 $r_{k,i,j}, p(i,j)$ 和 $q(i,j)$ 见表 1。

算法详解 以 0 时刻为起点, $A(1,2)$ 和 $A(1,3)$ 为候选活动, 由于它们的人员需求量 13 人及机械需求量 4 台都超过了上限, 故需重新调整进度计划。

表 1 双代号网络计划图实例数据

$A(i, j)$	乐观估计 时间/d	最可能 估计时间/d	悲观估计 时间/d	人员 总数/人	材料 总量/t	机械 总量/台	$p(i, j)$	$q(i, j)$	持续 时间/d	人员 强度/ (人·d ⁻¹)	材料 强度/ (t·d ⁻¹)	机械 强度/ (台·d ⁻¹)
1-2	0.6	1	3	10	7	3	0.59	0.05	1	10	7	3
1-3	3	5	8	14	14	5	0.41	0.24	5	3	3	1
2-3	2	4	5	8	12	4	0.57	0.05	4	2	3	1
2-4	5	7	12	30	28	8	0.02	0.22	8	4	4	1
3-4	4	8	10	24	36	16	0.98	0.52	7	3	5	2
3-5	2	4	9	14	18	4	0.00	0.51	5	3	4	1
4-5	1	3	7	11	6	6	0.62	0.46	3	4	2	2
4-6	4	7	13	23	51	24	0.38	0.29	7	3	7	3
5-6	3	5	11	19	32	6	0.62	0.35	6	3	5	1

用 Lindo 目标规划软件求解得 $\epsilon_{1,1-2} = 1, \epsilon_{2,1-3} = 0$, 故资源首先分配给 $A(1, 2)$, 时间推进到 $EF_{1-2} = 1$, 即 $T(1)$, $A(1, 2)$ 结束。在 $T(1)$ 的候选活动有 $A(1, 3)$, $A(2, 3)$ 和 $A(2, 4)$, 它们的资源强度分别为人员 9 人、材料 10t 及机械 3 台, 资源需求量满足供应上限, 3 项活动可同时进行, 时间推进到 $T(\min \{EF_{1-3}, EF_{2-3}, EF_{2-4}\}) = T(\min \{1 + 5, 1 + 4, 1 + 8\}) = T(5) = T(EF_{2-3})$, $A(2, 3)$ 结束。

在时刻 $T(5)$, 由于 3 号节点尚未结束, 候选活动仅为 $A(1, 3)$ 和 $A(2, 4)$, 它们的资源强度分别为人员 7 人、材料 7t 及机械 2 台, 满足资源需求, 时间推进到 $T(\min \{EF_{1-3}, EF_{2-4}\}) = T(\min \{5 + 5 - 4, 5 + 8 - 4\}) = T(6) = T(EF_{1-3})$, $A(1, 3)$ 结束。

此时, 候选活动为 $A(3, 4)$, $A(3, 5)$ 和已进行的 $A(2, 4)$, 资源需求量得不到满足, 需进行优化。优化结果为 $\epsilon_{1,2-4} = 0, \epsilon_{2,3-4} = 1, \epsilon_{3,3-5} = 1$, 资源优先配置给 $A(3, 4)$ 和 $A(3, 5)$, 时间推进至 $T(\min \{EF_{3-4}, EF_{3-5}\}) = T(\min \{6 + 7, 6 + 5\}) = T(11) = T(EF_{3-5})$, $A(3, 5)$ 结束。

$T(11)$ 时刻的候选活动为已进行的 $A(2, 4)$ 和 $A(3, 4)$, 满足资源供应量要求。时间推进到 $T(\min \{EF_{2-4}, EF_{3-4}\}) = T(\min \{11 + 8 - 5, 11 + 7 - 5\}) = T(13) = T(EF_{3-4})$, $A(3, 4)$ 结束。

$T(13)$ 时刻的候选活动仅有已进行的 $A(2, 4)$, 满足资源供应量要求。时间推进至 $T(\min \{EF_{2-4}\}) = T(\min \{13 + 8 - 5 - 2\}) = T(14)$, $A(2, 4)$ 结束。

$T(14)$ 时刻的候选活动为 $A(4, 5)$ 和 $A(4, 6)$, 机械强度需求得不到满足, 需进行优化配置。经计算, 优化结果为 $\epsilon_{1,4-5} = 1, \epsilon_{2,4-6} = 0$, 资源优先配置给 $A(4, 5)$, 时间推进至 $T(\min \{EF_{4-5}\}) = T(\min \{14 + 3\}) = T(17)$, $A(4, 5)$ 结束。

$T(17)$ 时刻的候选活动为 $A(4, 6)$ 和 $A(5, 6)$, 材料强度 12t 及机械强度 4 台均超过了供应量, 需进行优化配置, 优化结果为 $\epsilon_{1,4-6} = 0, \epsilon_{2,5-6} = 1$, 资源优先配置给 $A(5, 6)$, 时间推进至 $T(\min \{EF_{5-6}\}) = T(\min \{17 + 6\}) = T(23)$, $A(5, 6)$ 结束。

$T(23)$ 时刻的候选活动仅有 $A(4, 6)$, 满足资源供应量要求。时间推进至 $T(\min \{EF_{4-6}\}) = T(\min \{23 + 7\}) = T(30)$, $A(4, 6)$ 结束。

在 $T(30)$ 时刻, 所有活动均已结束, 故该进度计划的总工期为 30d。

4 结 语

工程项目是一个十分复杂的系统工程, 不仅施工活动充满不确定性, 在实际施工过程当中, 资源的分配也受到很大的制约。如何合理、科学地编制进度计划, 积极、有效地优化资源配置成为项目管理者亟待解决的问题。本文正是基于施工过程的不确定性, 考虑资源限制条件下 PERT 进度计划的优化问题, 结合风险评价指标 ACI 和 CRI, 运用 0-1 整数规划的方法, 对工程项目进行工期-资源的优化, 从而为项目管理者制定良好的施工进度计划, 优化资源配置, 提供了一种科学、有效的方法。

参考文献：

[1] 蔡晨, 万伟. 基于 PERT/CPM 的关键链管理[J]. 中国管理科学, 2003, 11(6) 35-39.

[2] CHOI J, REALFF M J, LEE J H. Dynamic programming in a heuristically confined state space: a stochastic resource-constrained project scheduling application[J]. Computers and Chemical Engineering, 2004, 28 1039-1058.

[3] GOLENKO-GINZBURG D, AHARON G. A heuristic for network project scheduling with random activity durations depending on the resource allocation[J]. Int J Production Economics, 1998, 55 149-162.

[4] 王卓甫. 工程项目风险管理: 理论、方法与应用[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2002 3-5.

[5] LASLO Z. Activity time-cost tradeoffs under time and cost chance constraints[J]. Computers & Industrial Engineering, 2003, 44 365-384.

[6] 胡肇枢, 王卓甫. PERT 网络计算分析之补充[J]. 河海大学学报: 自然科学版, 2002, 30(1) 29-34.

[7] 王卓甫, 杨高升, 杨建基. 水利水电施工中应用 PERT 的完工概率问题[J]. 河海大学学报: 自然科学版, 2002, 30(1) 44-48.

(收稿日期 2005-09-05 编辑 熊水斌)