

非饱和土二、三维固结方程简化计算方法

凌 华,殷宗泽

(河海大学岩土工程研究所,江苏 南京 210098)

摘要 针对非饱和土的固结问题的复杂性,为了计算的简化,将非饱和土固结分为 3 个阶段:初期压密、气压消散和水压消散。假定前两个阶段是瞬间完成的,其后独立考虑水压的消散。分别建立 3 个阶段的二、三维控制方程,以计算各阶段的气压、水压、骨架应力、相应的土体变形和水量变化。算例的计算结果表明本文方法简便、实用。该简化方法主要适用于饱和度不太高的非饱和土,而对饱和度较高的非饱和土,由于气压消散过程较长,不宜采用。

关键词 非饱和土;二维问题;三维问题;土体固结;简化计算法

中图分类号 :TU47

文献标识码 :B

文章编号 :1006-7647(2007)02-0018-04

Two- or three-dimensional simplified consolidation calculation of unsaturated soil//LING Hua, YIN Zong-ze (*Geotechnical Research Institute of Hohai University, Nanjing 210098, China*)

Abstract: In consideration of the complexity of the consolidation process of unsaturated soil and for simplification of the calculation, the consolidation process was divided into three stages, i. e. compaction at initial period, air pressure dissipation, and water pressure dissipation. It was assumed that the compaction at initial period and air pressure dissipation were completed instantaneously, and the stage of water pressure dissipation was studied separately. Then two- or three-dimensional control equations for the three stages were established respectively for calculation of the air pressure, water pressure, effective stress, soil deformation and variation of water volume. Case study shows that the present method is simple and practical, and that the simplified method is suitable for unsaturated soil with relatively low degree of saturation but not suitable for unsaturated soil with high degree of saturation due to the fact that for such soil the air pressure dissipation lasts a long period of time.

Key words: unsaturated soil; two-dimensional problem; three-dimensional problem; soil consolidation; simplified calculation method

非饱和土的固结要比饱和土复杂得多,它的流动介质包括水 and 气,复杂性主要在于气相的变形和流动。气可压缩,可溶于水,体积与压力有关并受温度影响,渗透性不恒定,流动复杂。由于气的存在,水的渗透系数变化,渗透性也相应复杂。非饱和土固结仅一维问题就有 10 余个变量,并有 10 多个方程,可联列求解。如 Barden^[1], Fredlund 等^[2]提出的方法。Dakshanamurthy 等^[3]、李锡夔等^[4]、陈正汉等^[5]、杨代泉等^[6]建立了非饱和土的三维固结方程,但方程较为复杂,求解也相当困难,难以在工程中应用。实用化(即简化)问题是非饱和土固结方程所面临的最突出的问题。

已有不少学者致力于非饱和土固结方程简化方法的研究,这些研究大体有以下几类:①假定气与水一起流动,将气和水看成是统一的混合流体,就一维固结问题建立单一的混合流体的消散方程^[7-10],所建方程比较简单、参数少,但主要适用于高饱和度的

情况。此外,不能计算吸力的变化。②假定固结主要是排气过程,忽略饱和度和吸力的影响,如扬代泉方法^[11]。③假定固结主要是水压的消散,如沈珠江方法^[12]。该法还通过引入排气率,在一定程度上反映了气压的消散过程。

非饱和土固结过程中水 and 气都存在流动。对于饱和度不太高的非饱和土,气压消散很快,水的流动非常缓慢。Rahardjo^[13]也曾指出,在很多情况下,超孔隙气压力的消散几乎是立即完成的。据此本文在建立固结方程时假定可以忽略气的流动过程,认为气压消散瞬间完成,再独立考虑水的流动,以简化计算。但这并不是无视气的存在,固结中仍然考虑气的压缩,考虑气的压力。这样,非饱和土受荷后变形可分成 3 个过程:初期压密过程、气压消散过程和继后固结过程。可合理假定前 2 个过程是瞬间完成的,其后水压缓慢消散。下面仅就二维问题讨论固结方程的建立(对三维问题思路是一样的)。

1 初期压密阶段

加荷后土体产生瞬间变形,初期压密阶段气和水都来不及排出,荷载由骨架、气和水三者共同分担,且气相的压缩量等于土体的体积变化。可用下列方程求应力和变形。

a. 有效应力原理^[14] :

$$\Delta \sigma = \Delta \sigma' + M \Delta u_a - \chi M \Delta u_s \quad (1)$$

式中: $M = [1 \ 1 \ 0]^T$; χ 为有效应力系数,可用经验公式^[15] $\chi = S_r / (0.4 S_r + 0.6)$ 计算。

b. 含水率不变。在初期压密阶段,土体内部含水率不发生变化,所以 $S_r e = S_{r0} e_0$ 。因此

$$\Delta S_r = - S_r \frac{\Delta e}{e} \quad (2)$$

c. 水分特征关系^[16] :

$$u_s = \frac{u_{sb}}{S_e^{\frac{1}{\lambda}}} \quad (3)$$

式中: u_{sb} 为土的进气值; S_e 为有效饱和度, $S_e = (S_r - S_1) / (1 - S_1)$; S_r 为饱和度; S_1 为剩余饱和度; λ 为 $\lg S_e - \lg u_s$ 关系曲线的斜率。式(3)微分得

$$\Delta u_s = - \frac{u_{sb}}{\lambda S_e \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)} \frac{\Delta S_r}{1 - S_1} \quad (4)$$

d. 气体压密关系:

$$(u_a + p_a)(1 - S_r)e = (u_{a0} + p_a)(1 - S_{r0})e_0 \quad (5)$$

式中: p_a 为大气压力; u_{a0} 为初始孔隙气压力,可认为 $u_{a0} = 0$ 。式(5)微分得

$$\Delta u_a = (u_{a0} + p_a) \frac{(1 - S_{r0})e_0}{(1 - S_r)e} \left(\frac{\Delta S_r}{1 - S_r} - \frac{\Delta e}{e} \right) \quad (6)$$

e. 本构关系:

$$\Delta \sigma' = D \Delta \varepsilon \quad (7)$$

f. 体变关系:

$$\Delta e = - (1 + e_0) \Delta \varepsilon_v = - (1 + e_0) M^T \Delta \varepsilon \quad (8)$$

将式(2)(6)(7)(8)代入式(1)得

$$\Delta \sigma = \hat{D} \Delta \varepsilon \quad (9)$$

式中: $\hat{D}$ 为初始状态下的刚度矩阵,

$$\hat{D} = D + M M^T (1 + e_0) \left[(u_{a0} + p_a) \frac{(1 - S_{r0})e_0}{(1 - S_r)^2 e^2} + \frac{\chi u_{sb} S_r}{\lambda S_e \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) (1 - S_1) e} \right]$$

式(9)为常见的应力应变关系形式,可用通常的有限元法进行计算。解得位移和应变后,再求有效应力、气压力、水压力、吸力、孔隙比和饱和度的变化。

2 气压消散阶段

对于饱和度不是很高的土,相对于水压的消散,气压消散是非常迅速的,故可合理假定气压消散瞬间完成。在这个过程中, $(1 - \chi) M \Delta u_{a1}$ 转化为有效应力 $\Delta \sigma_2'$; 气压下降, $\Delta u_{a2} = - \Delta u_{a1}$; 水压不变, $\Delta u_{w2} = 0$ 吸力下降, $\Delta u_{s2} = - \Delta u_{s1}$ 。

用有限元法计算此阶段相应的变形,荷载项由拟转化的有效应力求得,单元结点力为

$$F^e = \int B^T \Delta \sigma_2' dx dz \quad (10)$$

由此形成结点荷载,作有限元计算,求得结点位移,进而求各单元的体积应变,得到孔隙比变化 Δe_2 ,再由含水率不变求饱和度变化。

3 水压消散阶段

比奥固结理论曾考虑到非饱和土,由于没有恰当地反映非饱和土的特性,也没有给出相应参数的确定方法,所以该理论实际上并没有真正运用于非饱和土。但是其基本原理和思路是适用于非饱和土的。下面基于比奥固结理论来建立非饱和土实用固结方程。

a. 平衡微分方程

$$\partial^T \sigma = f \quad (11)$$

其中

$$\partial^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} f_x \\ f_z \end{bmatrix}$$

式中: f 为 x 和 z 方向的体积力。

值得注意的是外荷载已有一部分被初期和气压消散期发生的骨架应力平衡,式中的荷载项 f 仅仅是初期超静水压力所对应的荷载。因此式(11)可写成

$$\partial^T \sigma' + \chi \partial^T M u_w = f_w \quad (12)$$

将本构方程 $\sigma' = D \varepsilon$ 、几何方程 $\varepsilon = - \partial w$ 代入式(12)得到以位移和孔隙压力表示的平衡微分方程:

$$- \frac{1}{\chi} \partial^T D \partial w + \partial^T M u_w = \frac{1}{\chi} f_w \quad (13)$$

式中 $\frac{1}{\chi} f_w$ 可直接由初期水压力 $M \Delta u_{w1}$ 计算。

由虚位移原理建立的相应有限元法平衡方程为

$$\frac{1}{\chi} \iint_e B^T D B dx dz \Delta \delta^e + \iint_e B^T M N' dx dz \beta^e = F^e - F_t^e \quad (14)$$

其中

$$F^e = \frac{1}{\chi} \iint_e B^T M \Delta u_{w1} dx dz$$

$$F_t^e = \frac{1}{\chi} \iint_e B^T D B dx dz \delta_{t-1}^e$$

式中： F_t 为已发生的位移所对应的结点力； β^e 为单元结点超孔隙水压力向量。

b. 连续性方程。水流出的体积等于土体体积的变化，假定非饱和土中水的渗透系数 k_w 不变，非饱和土中水的连续性方程为

$$-\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = \frac{k_w}{\gamma_w} \left(\frac{\partial^2 u_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} \right) \tag{15}$$

体积应变为

$$\varepsilon_v = M^T \varepsilon = -M^T \partial w \tag{16}$$

将式(16)代入式(15)得

$$M^T \frac{\partial}{\partial t} \partial w - \frac{k_w}{\gamma_w} \left(\frac{\partial^2 u_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} \right) = 0 \tag{17}$$

由虚位移原理建立的相应有限元法连续性方程为

$$\iint_e N'^T M^T B dx dz \Delta \delta^e - \frac{k_w \Delta t}{\gamma_w} \cdot \iint_e \left(\frac{\partial N'^T}{\partial x} \frac{\partial N'}{\partial x} + \frac{\partial N'^T}{\partial z} \frac{\partial N'}{\partial z} \right) dx dz \tilde{\beta}^e = Q_1^e \Delta t \tag{18}$$

式中： Q_1^e 为从单元结点流出的流量； $\tilde{\beta}^e$ 为单元结点总水势， $\tilde{\beta} = \beta + \gamma_w z$ ， $\gamma_w z$ 为位置高度所对应的势。

将式(14)与式(18)联立，得水-固耦合的非饱和土固结有限元的单元方程：

$$\begin{bmatrix} \bar{k} & k' \\ k'^T & \tilde{k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \delta \\ \tilde{\beta} \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} F - F_t + F_1 \\ Q_1 \Delta t \end{Bmatrix}^e \tag{19}$$

式中： $\bar{k}$ 为劲度矩阵， $\bar{k} = \frac{1}{\chi} \iint_e B^T D B dx dz$ ； k' 为水

压-位移关系矩阵， $k' = \iint_e B^T M N' dx dz$ ； $\tilde{k}$ 为渗流矩

阵， $\tilde{k} = -\frac{k_w \Delta t}{\gamma_w} \iint_e \left(\frac{\partial N'^T}{\partial x} \frac{\partial N'}{\partial x} + \frac{\partial N'^T}{\partial z} \frac{\partial N'}{\partial z} \right) dx dz$ ；

$$F_1^e = \iint_e B^T M N' dx dz (\gamma_w z)^e。$$

由式(19)可进一步形成总体矩阵，解得位移和孔隙水压力。利用解得的位移可得体应变 ε_v ，进而得孔隙比变化 Δe_3 。此阶段只有水的排出，故饱和度的变化为 $\Delta S_{r3} = (1 - S_{r2}) \Delta e_3 / (e_2 + \Delta e_3)$ 。

由于假定气压已消散，吸力 $u_s = -u_w$ 。如果计算中某点的水压为正，吸力就要为负。这显然是不可能的。这是由于假定气压瞬时消散所带来的结果。可近似地作以下处理：当 $u_w > 0$ 时，吸力为零。实际上在气压瞬时消散阶段和水压消散公式推导中并未用到吸力，饱和度的变化也是由孔隙比的变化

推求，因此这个近似处理对于文中的计算方法几乎没有影响。另外当 $u_w > 0$ 时，计算渗透系数仍用非饱和土渗透系数，因为实际上土中还有气，饱和度并不为 1.0。应该说，是否饱和取决于饱和度是否接近于 1.0。用压力的正负作为判别标准是不严密的，对于饱和度较低的土更是如此。

上述计算还隐含了在固结过程中吸力与饱和度的关系不符合水分特征曲线，吸力的变化仅仅取决于水压力的消散。水分特征曲线是在吸力与水分(含水量或饱和度)达到稳定的情况下测得的。固结过程中没有稳定，故不宜将其列入固结计算的控制方程。应该说吸力在固结过程中是有影响的，但不一定是稳定情况下测得的水分特征曲线那样的规律来影响，这是一个复杂的问题。作为近似计算，不考虑此影响。

4 算 例

对海大学岩土工程研究所的 BCF 程序进行修改，以适应非饱和土初期压密、气压瞬时消散、水压消散的计算。

设有路堤， $y = 0$ 处为地下水位线，路堤全部处于非饱和土区域，现已填筑至 7 m，继续填土 1 m，路堤为对称结构，单元划分及尺寸见图 1(a)。假定继续填筑前路堤内的气压等于大气压力，水压力由其位置高度决定，为 $-\gamma_w z$ ，见图 1(b)。各层路堤的 e 及 S_r 相同，分别为 0.52 和 85%。继续填筑前，非饱和路堤的有效应力除自重应力外，还应包括吸力的作用，由公式(1)计算。

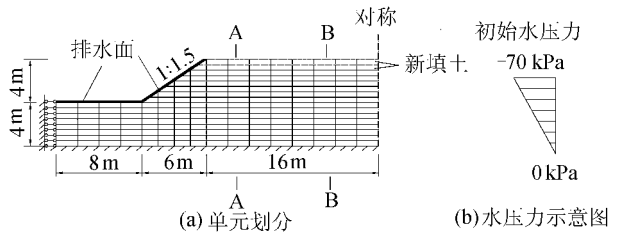


图 1 路堤计算简图

设路堤内所有材料的邓肯模型参数相同： $\varphi = 30^\circ$ ， $c = 20$ kPa， $R_f = 0.88$ ， $k = 150$ ， $n = 0.76$ ， $G = 0.25$ ， $F = 0.05$ ， $D = 3.8$ ；密度相同， $\rho = 1.8$ g/cm³；饱和时的渗透系数相同，为 0.008 64 m/d。

假定继续填筑 1 m 高度。与饱和土不同，在加荷初期，非饱和土的荷载由土骨架、气、水共同承担，并产生相应的变形，计算结果见图 2。由图 2(a)可知，在斜坡附近由填筑引起的应力比较小，在路堤中间位置处则较大，存在应力扩散现象。图 2(b)给出了路堤产生的竖向位移。图 2(c)给出了气压力的分布。由于在 0 ~ 4 m 高度的两边限制了 x 向位移，

而斜坡上无位移限制,相对于 0 ~ 4 m 高度土层而言,4 ~ 7 m 土层产生了较大的横向变形(膨胀),体积变形小,因此产生的气压力小。在路堤中间位置处产生的气压力较大,在两边产生的气压力较少。比较图 2(c)和图 2(d)可知,产生的气压力比水压力小,但两者相差不大,表明在初期压密后吸力会有少量的增加,饱和度也略有增大。

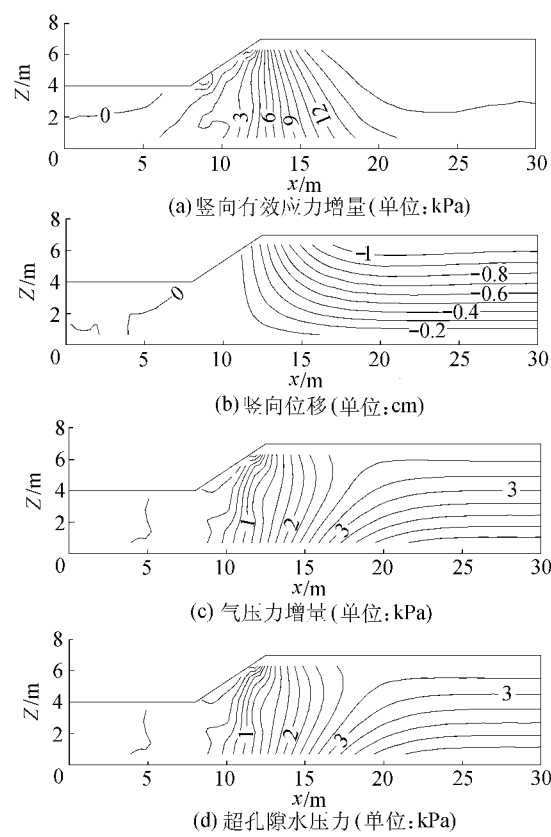


图 2 初期压密计算结果

气压力瞬时消散为零,气压力转化为有效应力 $(1 - \chi) M \Delta u_{a1}$ 。由于气压力本身不大,转化的有效应力比较小,对应的位移也就很小,限于篇幅文中未给图。由于这一阶段是在瞬间发生的,水压力并未发生变化。

气压瞬时消散后超孔隙水压力缓慢消散,最终为零。也就是说,当固结完成后路堤内各位置的总水压力应回到初始值。在水压消散过程中,A-A 和 B-B 两个断面(见图 1)的超孔隙水压力变化如图 3 所示,在填土后约 200 d 水压基本消散完毕。水压消散完毕时,由填土引起的路堤最终位移见图 4。比较图 2(b)和图 4 可以发现:在加荷初期非饱和土的变形已大部分完成,其后在气、水压力消散阶段发生的变形较小。

通过以上分析可以看出,算例的计算结果反映了路堤的结构特征和非饱和土变形的基本特性,表明了本文固结简化计算方法的合理性和正确性。

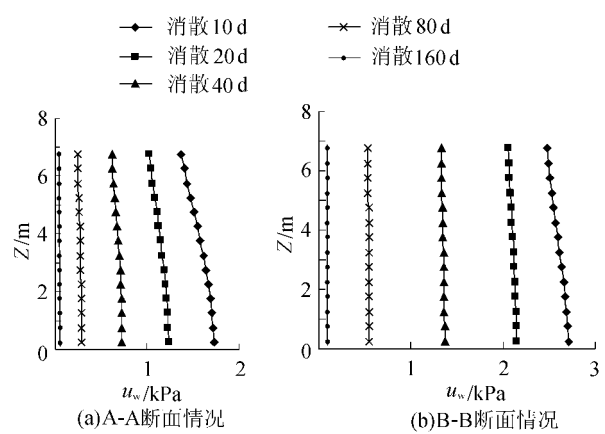


图 3 水压消散时的超孔隙水压力 u_w 变化

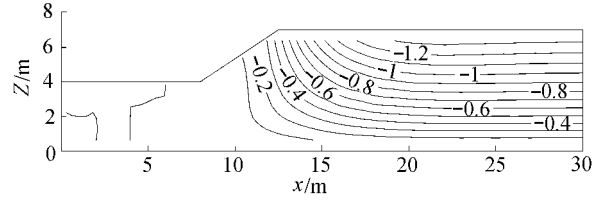


图 4 水压消散完毕时的竖向位移(单位:cm)

5 结 论

- 三阶段简化方法基本反映了非饱和土的固结过程。将非饱和土的气压消散看成是瞬间完成的,其后再单独考虑水相的消散,这种简化方法基本合理,特别适合于饱和度不太高的非饱和土。
- 吸力增大了非饱和土的强度和刚度。非饱和土的变形在初期压密阶段就已形成了大部分,在后续孔隙消散阶段发生的变形较小。

参考文献:

- [1] BARDEN L. Consolidation of compacted and unsaturated clays [J]. Geotechnique, 1965, 15(3): 267-286.
- [2] FREDLUND D G, HASAN J U. One dimensional consolidation theory: unsaturated soils [J]. Canadian Geotechnical Journal, 1979, 16(3): 521-531.
- [3] DAKSHANAMURTHY V, FREDLUND D G, RAHARDJO H. Coupled three-dimensional consolidation theory of unsaturated porous Media [C]//5th International Conference on Expansive Soils. Adelaide, Australia: Institute of engineers, 1984: 99-104.
- [4] LI Xi-kui, ZIENKIEWICZ O C, XIE Y M. A numerical model for immiscible two phase flow in a porous medium and its time domain solution [J]. Int J Num Method in Eng, 1990, 30(6): 1195-1212.
- [5] CHEN Zheng-han, XIE Ding-yi, LIU Zu-dian. The consolidation of unsaturated soil [C]//7th Int Conf Computer Methods and Advances in Geomech. Cairns, 1991: 1617-1621.

(下转第 33 页)

表 1 优化结果

时段序号	时刻	时段负荷/ MW	机组负荷分配/MW						耗水量/ m ³
			机组 1	机组 2	机组 3	机组 4	机组 5	机组 6	
1	0 00 00	450	0	0	0	0	450	0	216566
2	0 15 00	450	0	0	0	0	450	0	216566
28	6 45 00	450	0	0	0	0	450	0	216566
29	7 00 00	2900	550	550	550	150	550	550	1967 679
30	7 15 00	2900	550	550	550	150	550	550	1417 679
76	18 45 00	772	0	225	0	0	550	0	380 673
77	19 00 00	2900	550	550	550	150	550	550	1857 679
78	19 15 00	2900	550	550	550	150	550	550	1417 679
96	23 45 00	450	0	0	0	0	450	0	216566

注 由于该水电站网路限制,电站最大出力为 2900 MW。

成本的水量折算,它并不是后停过程中实际消耗的水量,而是成本的水当量。另外,由表 1 可见机组 5 在中、高负荷时效率较高,机组 2 和机组 6 次之,机组 4 效率最低。

4 结 语

本文将惩罚函数、动态修正出力-流量关系与动态规划结合,解决了电站厂内经济运行中的多约束问题,并将短期优化调度的输出(96 点日负荷)作为厂内经济运行的输入,使两大调度手段紧密结合起来。模型中充分考虑了机组启停成本、气蚀振动区、机组可用性及主接线方式等约束条件,使优化结果更符合电厂的实际生产情况。算例结果表明本文方法易于实现程序设计且计算速度快,具有实用性。

(上接第 21 页)

[6] YANG Dai-quan, SHEN Zhu-jiang. Two-dimensional numerical simulation of generalized consolidation problem of unsaturated soils [C]//7th Int Conf Computer Methods and advances in Geomech. Cairns, 1991 1261-1266.

[7] YIN Zong-ze, SUN Chang-long, MIAO Lin-chang. Consolidation of unsaturated expansive soils [C]//2nd International Conference on Unsaturated Soils. Beijing: International Academic Publishers, 1998.

[8] Chang C S, DUNCAN J M. Consolidation analysis for partly saturated clay by using an elastic-plastic effective stress-stating model [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1983, 7(1) 39-55.

[9] 张庆华, 丁学福, 孙长龙. 非饱和土固结一维半解析解 [J]. 水道港口, 1996(3) 33-41.

[10] 魏海云, 詹良通, 陈云敏. 高饱和度非饱和土的压缩和固结特性及其运用 [J]. 岩土工程学报, 2006, 28(2) 264-269.

[11] 杨代泉, 沈珠江. 非饱和土的一维固结简化计算 [J]. 岩

参考文献:

[1] 马光文, 王黎. 水电竞价上网优化运行 [M]. 成都: 四川科技出版社, 2003.

[2] DUDEK G. Unit Commitment by genetic algorithm with specialized search operators [J]. Electric Power Systems Research, 2004, 72 299-308.

[3] 张勇传. 水电站经济运行管理 [M]. 北京: 中国水利水电出版社, 1998.

[4] 阿尔塞 A, 马元. 伊泰普水电站水轮发电机组的优化调度 [J]. 水利水电快报, 2002, 23(20) 1-4.

[5] 权先璋, 蒋传文, 李承军. 水电站 AGC 中的惩罚函数及虚拟机组技术 [J]. 华中理工大学学报, 2002, 8(7) 91-94.

[6] 权先璋, 蒋传文, 李承军, 等. 水电厂内经济运行问题中的主接线运行方式约束的研究 [J]. 水电能源科学, 1999, 17(3) 38-39. (收稿日期 2006-06-30 编辑 高建群)

土工程学报, 1991, 13(5) 70-78.

[12] SHEN Zhu-jiang. Reduced suction and simplified consolidation theory for unsaturated soils [C]//Proc First Int Conf Unsaturated Soils. Rotterdam, Pairs: Balkema A A, 1995 1533-1540.

[13] RAHARDJO H. The study of undrained and drained behavior of unsaturated soils [D]. Saskatchewan, Canada: University of Saskatchewan, 1990: 259-269.

[14] BISHOP A W, ALPAN I, BLIGHT G E, et al. Factors controlling the shear-strength of partly saturated cohesive soils [C]//ASCE Conference on Shear of Cohesive Soils. Colorado: University of Colorado, 1960 503-532.

[15] AITCHISON G D. Relationship of moisture and effective stress functions in unsaturated soils [C]//Pore Pressure and Suction in Soils conf. London: Butterworths, 1961 47-52.

[16] FREDLUND D G, RAHARDJO H. 非饱和土力学 [M]. 陈仲颐, 张在明, 陈愈迥, 等译. 北京: 中国建造工业出版社, 1997.

(收稿日期 2006-08-16 编辑 高建群)