

基于多参数强度准则的安全系数定义问题

钱向东 ,焦彩虹

(河海大学土木工程学院 ,江苏 南京 210098)

摘要 :从一般的多参数强度准则出发 ,分别给出了传统安全系数、超载系数和强度折减系数的定义 ,根据其物理、几何意义 ,结合最简单的多参数强度准则——Mohr-Coulomb 准则 ,对各种安全系数进行了分析与讨论 ,指出现有各种安全系数的定义均存在局限性 ,很难直接应用于一般的多参数强度准则 ,说明了重新定义适用于各种应力状态和强度准则的点安全系数的必要性。
关键词 :多参数强度准则 ;安全系数 ;超载系数 ;强度折减系数 ;Mohr-Coulomb 准则
中图分类号 :TU311.2 文献标识码 :A 文章编号 :1006-764X(2007)04-0034-04

On definitions of safety factor based on multi-parameter strength criterion//QIAN Xiang-dong , JIAO Cai-hong(College of Civil Engineering , Hohai University , Nanjing 210098 , China)
Abstract : Three kinds of safety factors , such as the conventional safety factor , overload factor , and strength reduction factor were defined based on the general multi-parameter strength criteria. In combination with the Mohr-Coulomb criterion—the simplest multi-parameter strength criterion , the above factors were discussed according to their mechanical and geometric meanings , and the limitations of each definition were revealed. As a result , it is difficult for the current definitions about safety factors to be applied directly to the general multi-parameter strength criteria , and it is necessary to redefine the point safety factor suitable for different stress states and strength criteria.
Key words : multi-parameter strength criterion ; safety factor ; overload factor ; strength reduction factor ; Mohr-Coulomb criterion

传统的容许应力设计法由于简单、直观、便于计算 ,依然是许多工程领域(如大坝、压力容器等)中广泛采用的结构强度设计方法。容许应力对应的安全指标是点安全系数 ,它是衡量工程结构安全度的重要指标 ,在单轴应力条件下也是保证强度安全的充分条件。

点安全系数的大小与各点的应力状态以及材料的强度准则、强度参数有关。当采用四大古典强度理论时 ,点安全系数(记为 K_1)可以方便地表示为^[1]

$$K_1 = \frac{\sigma_s}{\sigma_r} \tag{1}$$

式中 : σ_s 为材料的单轴强度指标(如单轴抗拉强度 f_t 、单轴抗压强度 f_c) ; σ_r 为相当应力 ,是主应力的函数 ,各强度理论的相当应力和强度指标分别为

第一强度理论

$$\sigma_r = \sigma_1 \quad \sigma_s = f_t$$

或

$$\sigma_r = \sigma_3 \quad \sigma_s = f_c$$

第二强度理论

$$\sigma_r = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \quad \sigma_s = f_t$$

第三强度理论

$$\sigma_r = \sigma_1 - \sigma_3 \quad \sigma_s = f_t$$

第四强度理论

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad \sigma_s = f_t$$

古典强度理论由于其形式简单且比较符合一些工程材料的失效实验结果 ,被广泛应用于工程强度设计 ,但它们并不适用于像混凝土、岩土类工程材料。为了建立能够反映多轴强度差异明显的强度理论或强度准则 ,各国学者开展了大量的材料实验 ,提出了一系列包括多个材料参数的强度准则^[2-3] , Mohr-Coulomb 准则是最早的多参数准则 ,为岩土工程的强度分析和设计提供了有力的工具 ,然而 ,由于该准则中包含有多个材料参数 ,不能像上述古典准则那样直接计算点安全系数(这里称之为传统安全系数(conventional safety factor)) ,取而代之的是超载系数(over load factor)和强度折减系数(strength reduction factor)。文献[4]以 Mohr-Coulomb 准则为

例,研究了超载系数和强度折减系数之间存在的差异,但是,目前还很少有对各种系数之间的关系和适用条件进行系统研究的报道。

本文从一般的多参数强度准则出发,分别给出了传统安全系数(记为 K_1)、超载系数(记为 K_2)和强度折减系数(记为 K_3)的定义,以最简单的多参数强度准则 Mohr-Coulomb 准则为例对各种安全系数进行分析与讨论,揭示各种安全系数定义的局限性及难以直接应用于一般的多参数强度准则的原因。

1 传统安全系数定义的推广

对于只有一个强度参数的四大古典强度理论,其强度准则可以统一表示为

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_s} - 1 = 0 \quad (2)$$

令 $f(\sigma) = \sigma_r/\sigma_s$,则可以将强度准则进一步表示为更一般的形式:

$$F(\sigma) = f(\sigma) - 1 = 0 \quad (3)$$

其中 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^T$ 为一点的应力状态, $F(\sigma) = 0$ 表示主应力空间中的一个曲面,通常称为材料的失效(屈服或破坏)面。根据传统安全系数的定义并结合式(2)和式(3),可将其推广到一般的多参数强度准则,此时,传统安全系数 K_1 表示为

$$K_1 = \frac{1}{f(\sigma)} \quad (4)$$

显然,式(1)只是式(4)在 $f(\sigma) = \sigma_r/\sigma_s$ 时的特殊情形。

对于一般的多参数强度准则可按式(4)计算点安全系数,但是当 $f(\sigma) < 0$ 时,安全系数 K_1 为负数。例如,对常用的 Mohr-Coulomb 准则:

$$\sigma_1 - \alpha\sigma_3 = f_t \quad (5)$$

$$\text{或} \quad \sigma_1 - \sigma_3 = 2c \cos \varphi - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi \quad (6)$$

其中 $\alpha = f_t/f_c$ 是材料的拉压强度比, f_c 取绝对值, c 和 φ 分别为黏聚力和内摩擦角,且有如下关系:

$$\alpha = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}$$

$$f_t = \frac{2c \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}$$

$$f_c = \frac{2c \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

将式(5)和式(6)写成式(3)的形式,则有

$$f(\sigma) = \frac{\sigma_1 - \alpha\sigma_3}{f_t} \quad (7)$$

$$\text{或} \quad f(\sigma) = \frac{(1 + \sin \varphi)\sigma_1 - (1 - \sin \varphi)\sigma_3}{2c \cos \varphi} \quad (8)$$

$$K_1 = \frac{f_t}{\sigma_1 - \alpha\sigma_3} = \frac{2c \cos \varphi}{(1 + \sin \varphi)\sigma_1 - (1 - \sin \varphi)\sigma_3} \quad (9)$$

当 $(1 + \sin \varphi)\sigma_1 - (1 - \sin \varphi)\sigma_3 < 0$ 时, $K_1 < 0$,无物理意义。另外,当 $c = 0$ 时, $K_1 = 0$,显然不符合实际情况。

可见,传统的安全系数定义不完全适用于多参数强度准则。

2 超载系数的定义

如果将传统安全系数的定义(式(4))改写为

$$K_1 f(\sigma) = 1 \quad (10)$$

则当

$$K_1 f(\sigma) = f(K_1 \sigma) \quad (11)$$

即应力函数 $f(\sigma)$ 为主应力的齐次函数时,有

$$f(K_1 \sigma) - 1 = 0 \quad (12)$$

对照强度准则一般表达式(式(3))后不难发现,式(12)表示对任意的应力状态 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^T$,各主应力保持比例扩大 K_1 倍后正好满足强度极限方程(强度准则),即落在失效曲面上,其几何意义如图1(a)所示。一般情况下 $f(\sigma)$ 不一定是主应力的齐次函数,因此,式(10)和式(12)并不完全等价。为了便于区分,将式(12)中的 K_1 改为 K_2 ,即

$$F(K_2 \sigma) = f(K_2 \sigma) - 1 = 0 \quad (13)$$

称 K_2 为该应力状态的超载系数。

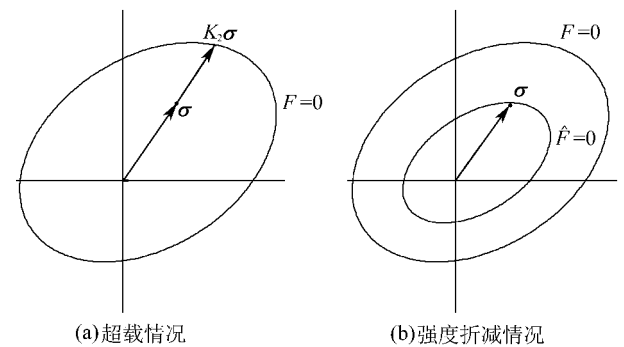


图1 应力点与强度极限面示意图

对于 Mohr-Coulomb 准则,其应力函数 $f(\sigma)$ 正好是主应力的齐次函数,因此,超载系数 K_2 与传统安全系数 K_1 的表达式(式(9))完全一样,即

$$K_2 = \frac{2c \cos \varphi}{(1 + \sin \varphi)\sigma_1 - (1 - \sin \varphi)\sigma_3}$$

但作为超载系数, K_2 具有明确的几何意义,如图2所示,即将原始的由 (σ_1, σ_3) 组成的应力圆改变为由 $(K_2\sigma_1, K_2\sigma_3)$ 组成的应力圆,使其与强度包络线 $\tau = c - \sigma_n \tan \varphi$ 正好相切。这里

$$\tau = \frac{K_2(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} \cos \varphi$$

$$\sigma_n = \frac{K_2(\sigma_1 + \sigma_3)}{2} + \frac{K_2(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} \sin \varphi$$

可以验证,当 $(1 + \sin \varphi)\sigma_1 - (1 - \sin \varphi)\sigma_3 < 0$ 时,对

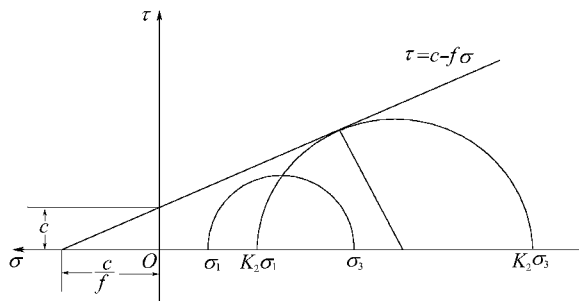


图2 超载应力圆与强度包络线

任意的 $K_2 > 0$ 和 $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ 总存在

$$K_2(\sigma_1 - \sigma_3) < 2c \cos \varphi - K_2(\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi$$

表明此时无论把应力圆扩大多少倍都不可能和强度包络线相切,即满足式(13),或者说,在某些并非静水压力的应力状态下材料的强度为无限大,显然违背常理,也不符合材料强度的试验结果。

可见,超载系数的定义也不完全适用于多参数强度准则。

3 强度折减系数的定义

由于材料的强度极限面或破坏面也是材料强度参数的函数,因此,有时更一般地把强度准则表示为应力和强度参数的表达式:

$$F(\sigma, \sigma_s) = f(\sigma, \sigma_s) - 1 = 0 \quad (14)$$

式中 $\sigma_s = (a, b, c, d, \dots)^T$ 表示材料强度参数。

对任意的 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^T$, 不一定正好满足强度极限方程(14),在不改变应力状态的前提下,如果调整强度参数,即改变强度极限面的形状或大小,也能使 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^T$ 正好满足方程(14),即落在强度极限面上。对于多参数的强度准则,目前通常采用保持各强度参数之间的比例关系不变,使其同时降低 K_3 倍后应力达到强度极限,即

$$\hat{F}(\sigma, \sigma_s) = F(\sigma, \sigma_s / K_3)$$

$$\text{或} \quad f(\sigma, \sigma_s / K_3) - 1 = 0 \quad (15)$$

则称 K_3 为该应力状态的强度折减系数,其几何意义如图3所示。

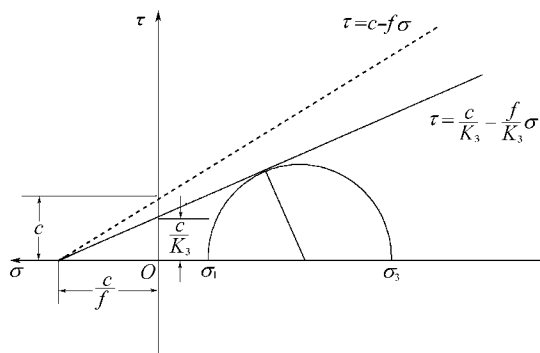


图3 应力圆与强度折减包络线

显然,当 $f(\sigma, \sigma_s / K) = f(K\sigma, \sigma_s)$ 时, $K_1 = K_3$; 当 $f(\sigma, \sigma_s / K) = f(K\sigma, \sigma_s)$ 时 $K_2 = K_3$ 。

对于 Mohr-Coulomb 准则,工程上常以黏聚力 c 和摩擦系数 $f = \tan \varphi$ 为强度参数,相应的强度准则表达式为 $\tau = c - \sigma_n \tan \varphi$,将 c, f 同时折减为 $1/K_3$ 后正好满足强度极限方程,即

$$\tau = \frac{c}{K_3} - \frac{f}{K_3} \sigma_n \quad (16)$$

其几何意义是同时调整直线 $\tau = c - \sigma \tan \varphi$ 的斜率和截距至 $\tau = \frac{c}{K_3} - \frac{f}{K_3} \sigma$,使其与 (σ_1, σ_3) 组成的应力圆相切,如图3所示。

若用主应力表示相切条件,即

$$(\sigma_1 - \sigma_3) \sqrt{1 + \frac{f^2}{K_3^2}} = -(\sigma_1 + \sigma_3) \frac{f}{K_3} + 2 \frac{c}{K_3} \quad (17)$$

则强度折减系数可用显式表示为

$$K_3 = \frac{2\sqrt{c^2 - cf(\sigma_1 + \sigma_3) + f^2 \sigma_1 \sigma_3}}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (18)$$

根据 K_3 的几何意义和表达式(18)可知只要 $\sigma_1 < c/f$ 且 $\sigma_3 \neq \sigma_1$,总可以调整强度包络线与应力圆相切,即 K_3 肯定为有限的实数。由此可见,对于 Mohr-Coulomb 准则,强度折减系数既有明确的物理、几何意义,又有适用性良好的数学表达式,因此,已被岩土工程界广泛采用^[5-9]。当然,从形式上看,当 $\sigma_3 = \sigma_1 > 0$ 时,即三向受拉时,也会出现 $K_3 = \infty$ 的不正常现象。因此,将强度折减系数作为安全系数也非普遍适用。

另外,对于一般的多参数强度准则,各参数不一定都像 c 和 f 那样具有确切的物理意义,通常以单轴强度参数 f_t 或 f_c 作为基本参数,在设定拉压强度比 $\alpha = f_t / f_c$ 的情况下由特征状态的试验结果标定其他参数,显然,能够进行折减的独立参数只有2个,即 (f_t, f_c) (α, f_t) 或 (α, f_c) , 仍然以 Mohr-Coulomb 准则为例,3种情况下的强度折减系数分别为

$$K_3' = \frac{f_t}{\sigma_1 - \alpha \sigma_3} = \frac{2c}{(\sigma_1 - \sigma_3) \sqrt{1 + f^2} + (\sigma_1 + \sigma_3) f} \quad (19)$$

$$K_3'' = \frac{f_t + \alpha \sigma_3}{\sigma_1} = \frac{2c + (\sqrt{1 + f^2} - f) \sigma_3}{(\sqrt{1 + f^2} + f) \sigma_1} \quad (20)$$

$$K_3''' = \frac{\alpha \sigma_3 \pm \sqrt{\alpha^2 \sigma_3^2 - 4 \alpha f_c \sigma_1}}{2 \sigma_1} \quad (21)$$

可见,选用不同的参数进行折减将得出完全不同的安全系数。因此,目前除了对 Mohr-Coulomb 准则和 Drucker-Prager 准则采用强度折减外,还没有看

到强度折减系数应用于其他多轴强度准则的报道。

4 数值分析

为了进一步比较分析各种安全系数之间的关系和差异,下面仍然以 Mohr-Coulomb 准则为例,给出一些应力组合(应力状态)下的安全系数计算值(见表1),计算时,取黏聚力 $c = 1.5 \text{ MPa}$ 、摩擦系数 $f = 1.0$ 。

表1 安全系数计算值

主应力/MPa		安全系数		
σ_1	σ_3	K_1	K_2	K_3
1.20	-15.00	0.329	0.329	0.275
1.20	-1.20	0.884	0.884	0.750
1.20	0.00	1.036	1.036	1.118
1.20	0.60	1.133	1.133	1.732
1.20	1.20	1.250	1.250	∞
0.00	-2.00	3.621	3.621	2.291
-1.00	-4.00	-3.961	-3.961	2.472
-1.20	-8.00	7.200	7.200	1.490
-2.50	-15.00	16.885	16.885	1.300
-8.00	-8.00	-0.187	-0.187	∞

从表1中(对于 Mohr-Coulomb 准则 K_1 与 K_2 自然相等)可以看出,超载系数 K_2 与强度折减系数 K_3 存在很大的差异,特别是在多轴受压的情况下,两者的差异更为显著。对于主要以多轴受压为主的岩土类材料,超载系数 K_2 所反映的安全度显然是不符合工程实际的,而强度折减系数 K_3 所反映的安全度是比较正常的,所以被岩土工程界广泛采用。

5 结 语

本文针对一般的多参数强度准则给出了目前常用的传统安全系数 K_1 、超载系数 K_2 和强度折减系数 K_3 的定义,通过其物理、几何意义的分析表述,结合最简单的多参数强度准则——Mohr-Coulomb 准则,对各种安全系数进行了分析与讨论,得出了以下结论:①对于一类强度准则,即应力函数 $f(\sigma)$ 是主应力的齐次函数的准则,传统安全系数 K_1 和超载系数 K_2 完全一样;②正常应力状态下,传统安全系数 K_1 和超载系数 K_2 的值域超出了安全系数概念的正常范畴,不能完全表示材料的点强度安全系数;③超载系数 K_2 和强度折减系数 K_3 具有明确的几何意义,但对于一般的多参数强度准则两者表示的安全度概念完全不同;④对于某些两参数强度准则,如 Mohr-Coulomb 准则,强度折减系数 K_3 能够较好地表示材料的点强度安全系数,但很难应用于具有2个以上参数的强度准则;⑤基于 Mohr-Coulomb 准则的数值计算结果表明,超载系数 K_2 与强度折减系数 K_3 存在很大的差异,特别是在多轴受压的情况下,两者的差异十分显著。综上所述,现有的点安

全系数定义均存在一定的局限性,很难直接应用于一般的多参数强度准则。为了正确、清晰地表示基于多参数强度准则的点安全系数,便于工程结构的强度设计和校核,有必要进一步研究安全系数的一般概念,重新定义适用于各种应力状态和强度准则的点安全系数表达式。

参考文献:

[1] 范钦珊. 材料力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000: 180.
[2] 过镇海. 混凝土的强度和变形试验基础和本构关系[M]. 北京: 清华大学出版社, 1997: 123-149.
[3] 俞茂宏. 工程强度理论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1999: 380-382.
[4] 高大水, 章建军, 高润德. 关于建筑物强度储备系数的讨论[J]. 人民长江, 1997, 28(6): 14-15.
[5] GRIFFITHS D V, LANE P A. Slope stability analysis by finite element[J]. Geotechnique, 1999, 49(3): 387-403.
[6] DAWSON E M, ROTH W H, DRESCHER A. Slope stability analysis by strength reduction[J]. Geotechnique, 1999, 49(6): 835-840.
[7] 钱向东. 复杂基岩稳定分析的弹塑性极限平衡法[J]. 河海大学学报: 自然科学版, 1999, 27(6): 16-19.
[8] 孙伟, 龚晓南. 土坡稳定分析强度折减有限元法[J]. 科技通报, 2003, 19(4): 319-322.
[9] 郑颖人, 赵尚毅. 有限元强度折减法在土坡与岩坡中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(19): 3381-3388.

(收稿日期 2006-09-22 编辑 熊水斌)

· 简讯 ·

第5届中国水论坛将于2007年11月在南京举办

由中国自然资源学会水资源专业委员会、中国水利学会水文专业委员会和水资源专业委员会等主办, 河海大学、南京水利科学研究院等承办的第5届中国水论坛将于2007年11月11~12日在南京举办。会议主题为“环境变化与水安全”, 包括4方面的内容: ①基础理论: 产汇流理论, 水循环理论, 水资源循环经济理论, 水资源系统分析理论, 水环境演变理论, 流域生态环境系统演化与调控机理, 水文不确定性理论, 水文计算, 水文水资源信息理论, 生态水文学, PUB 问题等; ②技术方法: 3S 技术, 数字流域, 数字水文, 分布式水文模拟, 同位素技术, 系统识别技术, 系统优化技术, 数学模拟技术等; ③水安全理论研究: 变化环境下的流域水循环机理, 水与气候、生态、环境、社会的相互作用机理; “大气水-地表水-土壤水-地下水-植物水”的时空变化与循环过程, 区域水资源形成与转化关系, 水资源可持续利用理论, 人类活动对区域水循环影响机理及生态效应, 河流、流域健康理论, 河流系统演变与水循环, 土地利用/覆被变化对生态安全影响机理等; ④应用实践: 水资源宏观调控和优化利用模式, 气候变化对水安全的影响的定量分析、模拟与评价, 水土资源一体化管理、流域规划与综合管理, 水经济、水权、水市场, 水安全保障体系, 水文化、水道德与法律、制度, 面对复杂和变化环境的水战略行动等。 (本刊编辑部供稿)