

河段水位预报 RC 模型

胡兴艺

(湖南省水文水资源勘测局,湖南长沙 410007)

摘要 本文根据河流力学与 RC 电路特性相似原理,对理想河流区段进行了模拟,建立了串联型 RC 电路模型,采用电路分析方法对该模型的系统函数公式进行了推导。具体针对二级串联型 RC 电路模型公式进行求解,并介绍了利用历史资料求解非线性微分方程的方法,通过实例验证了该模型的可行性。为了提高模型的预报精度,建议对于无任何支流的单一河段,该 RC 模型串联的级数尽量多,亦可根据不同河段或流域特性对 RC 模型的结构进行优化组合。RC 模型作为洪水预报的一种手段,起着连接水文科学与电子科学的纽带作用。

关键词 河流水位预报;串联型 RC 电路模型;水文模拟

中图分类号:P338;TV13 文献标识码:A 文章编号:1006-7647(2007)S2-0052-03

洪水预报^[1]是一项很复杂的工作,预报对象错综复杂。水文模型通常是指能对径流的产生、发展进行模拟、验证或预测的数学方法。根据侧重点不同,水文预报模型大致可分为:确定模型和随机模型;线性模型和非线性模型;时变模型和时不变模型;模拟模型和预报模型;集总模型和分散模型。随着流域面积的增大,流域的特性也随之而发生变化,流域的线性特性也越来越明显,这是线性系统模型得以应用的根本条件。

1 线性系统

某个系统,当输入发生变化后,相应输出的变化过程称为动态过程。如果系统的动态过程在数学上可归结为式(1)所描述的线性微分方程,那么该系统就称为线性动态系统^[2]。

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = \\ b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u(t) \end{aligned} \quad (1)$$

式中: $u(t)$ 为系统输入; $y(t)$ 为系统输出。

在水文上通常将式(1)离散化,令采样时间间隔 t 相同,得到线性系统的差分方程模型。例如对一个单输入、单输出离散线性系统的 n 阶差分方程可表示为

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_n y(t-n) =$$

$b_0 u(t) + b_1 u(t-1) + \dots + b_m u(t-m) \quad (2)$

线性系统通常用激励与响应^[3]来分析,激励是指系统的输入,响应是指系统的输出。

2 模型建立

设河流区间 AB 的 A 点对应水位为 $V_a(t)$, B 点对应水位为 $V_b(t)$,如图1所示。可以把此区间看成是有一个输入端和输出端的线性系统,如图2所示,其中 $V_a(t)$ 为随时间 t 变化的输入函数, $V_b(t)$ 为随时间 t 变化的输出函数,即所谓的激励和响应。



图1 河流区间示意图

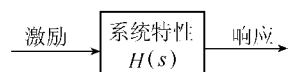


图2 系统模型

在电子线路^[4]中,一个简单的串联型一阶 RC 非线性电路^[5]系统可以用一个常系数线性微分方程来描述,其关系式为

$$RC \frac{du_c}{dt} + u_c = e(t) \quad (3)$$

式中: R 为电阻; C 为电容; $e(t)$ 为外加电动势,是系统的激励; $u_c(t)$ 为输出两端的电压,是系统的响应。系统特性决定于 RC 电路内部的元件参数和连接方式。

根据河流的水力学及 RC 电路特性,通常情况下,河流区间 AB 可用1组 n 阶 RC 非线性电路来近似模拟,并由1个非线性微分方程来描述。由于河

流具有容积和储蓄特性,它与电路上的电容特性相似,此外河流的蒸发和径流作用类似于电路上的电阻特性,水位相当于电压。因此,对于一段河流来说,可以采用由电阻和电容组成的 RC 电路来模拟,模型的结构可以根据不同的河道特征来设计。限于篇幅,本文主要讨论由 n 个一阶 RC 非线性电路串联组成的模型,推导其结果并进行探讨。

3 模型推导

根据阻抗分压关系写出系统函数 $H_n(s)$ 如下:

$$H_n(s) = \frac{V_b(s)}{V_a(s)} \quad (4)$$

对于 n 个一阶 RC 非线性电路串联型结构,根据电路分析和递推法,可求得

$$H_n(s) = \prod_{i=1}^n \frac{Z_i}{R_i + Z_i} \quad (5)$$

式中 $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ 为节点 $1, 2, \dots, n$ 对地分压阻抗。

由式(5)可推导出

$$H_n(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n \left(\frac{R_i}{Z_i} + 1 \right)} = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (\alpha_i + 1)} = \frac{1}{\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-m} \overbrace{\alpha_j \dots \alpha_k}^{n-m} + 1} \quad (6)$$

式中 $\overbrace{\alpha_j \dots \alpha_k}^{n-m}$ 表示在 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 中取 $n-m$ 个组合相乘,其中 j, k 取 $1, 2, \dots, n$ 。

通过推导可得

$$\alpha_i = \frac{\mu_{n-i+1}s^{n-i+1} + \mu_{n-i}s^{n-i} + \dots + \mu_2s^2 + \mu_1s}{\lambda_{n-i}s^{n-i} + \lambda_{n-i-1}s^{n-i-1} + \dots + \lambda_2s^2 + \lambda_1s + 1}$$

带入式(6)可得出 $H_n(s)$, 将 $H_n(s)$ 分子多项式设为 $B(s)$ 和分母多项式设为 $A(s)$, 其中 $A(s)$ 的次数为 $B(s)$ 的 n 次倍,根据留数定理求得拉氏逆变换^[3]为

$$h_n(t) = \mathcal{L}^{-1}[H_n(s)] = \sum_{k=1}^{(n+1)n/2} \operatorname{Res}[H_n(s)e^{st}] \quad (t > 0) \quad (7)$$

设 $B(s)$ 有 $\frac{(n+1)n}{2}$ 个单零点 $p_1, p_2, \dots, p_{\frac{(n+1)n}{2}}$, 即

这些点都是 $\frac{A(s)}{B(s)}$ 的单极点,代入海维赛(Heaviside)展开式^[3],有

$$h_n(t) = \sum_{k=1}^{(n+1)n/2} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t} \quad (t > 0) \quad (8)$$

显然,系统函数 $H_n(s)$ 的逆变换为 $h_n(t)$, $V_b(t)$ 可以利用 $h_n(t)$ 与 $V_a(t)$ 的卷积积分^[5]求得,即

$$V_b(t) = \int_0^t h_n(\tau) V_a(t - \tau) d\tau \quad (9)$$

4 模型分析

为了方便分析,取 $n = 2$,通过对式(6)求解,设未知变量分别为 R_1, R_2, C_1, C_2 。则得

$$H_2(s) = \frac{A(s)}{B(s)} \quad (10)$$

其中

$$A(s) = \beta_1 s + 1$$

$$B(s) = \eta_3 s^3 + \eta_2 s^2 + \eta_1 s + 1 =$$

$$(\rho_1 \rho_2 \rho_3 \chi s + \rho_1^{-1} \chi s + \rho_2^{-1} \chi s + \rho_3^{-1})$$

令

$$\alpha(s) = \frac{\beta_1 s + 1}{\rho_1 \rho_2 \rho_3}$$

$$D(s) = (s + \rho_1^{-1} \chi s + \rho_2^{-1} \chi s + \rho_3^{-1})$$

由式(8)得

$$h_2(t) = \sum_{k=1}^3 \frac{\alpha - \rho_k^{-1}}{D'(-\rho_k^{-1})} e^{-\rho_k^{-1} t} = K_1 e^{-\rho_1^{-1} t} + K_2 e^{-\rho_2^{-1} t} + K_3 e^{-\rho_3^{-1} t} \quad (11)$$

其中

$$K_1 = -\frac{\rho_1 - \beta_1}{(\rho_1 - \rho_2 \chi)(\rho_1 - \rho_3)}$$

$$K_2 = -\frac{\rho_2 - \beta_1}{(\rho_2 - \rho_1 \chi)(\rho_2 - \rho_3)}$$

$$K_3 = -\frac{\rho_3 - \beta_1}{(\rho_3 - \rho_1 \chi)(\rho_3 - \rho_2)}$$

代入式(9)求得系统输出函数 $V_b(t)$, 即

$$V_b(t) = \int_0^t h_2(\tau) V_a(t - \tau) d\tau \quad (12)$$

设 $V_a(t)$ 为一个离散时间函数,采样时间为 T , 则 $t = mT$, 按照卷积积分的数值计算方法,式(12)可变为

$$V_b(mT) = T \sum_{k=1}^m h_2(k) V_a(m - k) \quad (13)$$

可利用计算机编程计算,为了便于分析,这里采用矩形法,还可以利用梯形法、辛普生法^[5]以及缩短采样时间间隔 T 来减小近似误差。

将式(11)代入式(13)有

$$V_b(mT) = T \sum_{k=1}^m (K_1 e^{-\rho_1^{-1} k} + K_2 e^{-\rho_2^{-1} k} + K_3 e^{-\rho_3^{-1} k}) V_a(m - k) = -T \sum_{k=1}^m \left[\frac{\rho_1 - \beta_1}{(\rho_1 - \rho_2 \chi)(\rho_1 - \rho_3)} e^{-\rho_1^{-1} k} + \frac{\rho_2 - \beta_1}{(\rho_2 - \rho_1 \chi)(\rho_2 - \rho_3)} e^{-\rho_2^{-1} k} + \frac{\rho_3 - \beta_1}{(\rho_3 - \rho_1 \chi)(\rho_3 - \rho_2)} e^{-\rho_3^{-1} k} \right] V_a(m - k) \quad (14)$$

设有 1 组实测水位 $V_o(j)$, 令 $M = \sum_{j=0}^N [V_o(j) - V_h(j)]^2$, 根据多元函数的定理, 在最小偏差条件下, 利用最小二乘法^[6]和求偏导数方法可得出 $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \beta_1$ 代数方程组, 再利用牛顿迭代法^[7]求解。由于这些常数和 RC 电路模型中常量个数相等, 通常不再去求解 R_1, R_2, C_1, C_2 的实际值, 它们在模型中只作为过渡变量。

5 实例验证

在进行模型验证时, 对环境复杂的河流区域, 其计算结果会产生一定偏差。因此, 选择理想的河段进行验证, 其效果较好。本文以湖南沅水桃源至常德区段为例进行分析, 说明模型的使用过程和计算方法。随着计算机的广泛应用, 可利用 Matlab 或 Mathematic 等数值计算语言将逆变换的有关运算编程计算出结果, 使分析过程简化。限于篇幅, 桃源至常德河段水位 RC 预报模型参数演算过程及计算机编程省略。

通过对桃源、常德站水位按 1 h 时段实时监测, 即 $T = 1$, 以及计算机编程计算得出 1 组解为 $\rho_1 = 0.923\,445\,2, \rho_2 = 0.620\,209\,6, \rho_3 = 0.347\,726\,4, \beta_1 = 0.149\,245\,7; K_1 = -4.44, K_2 = 5.70, K_3 = -1.27$ 。代入式 (11) 并化简得

$$h_x(t) = \frac{-4.44}{e^{t/0.923\,445\,2}} + \frac{5.70}{e^{t/0.620\,209\,6}} + \frac{-1.27}{e^{t/0.347\,726\,4}} \tag{15}$$

式 (15) 即为沅水桃源至常德河段水位 RC 预报模型, 由卷积公式 (12) 可求得预报结果, 如表 1 所示。

时间	桃源		常德	
	实测 $V_o(t)$	实测 $V_h(t)$	计算 $V_h(t)$	误差 $\alpha(t)$
2004-06-26T16	38.10	35.12	35.046 05	-0.073 950
2004-06-26T17	38.15	35.17	35.146 88	-0.023 120
2004-06-26T18	38.20	35.22	35.224 96	0.004 959
2004-06-26T19	38.25	35.26	35.285 77	0.025 769
2004-06-26T20	38.29	35.30	35.337 80	0.037 797
2004-06-26T21	38.32	35.35	35.386 21	0.036 208
2004-06-26T22	38.35	35.40	35.428 90	0.028 900
2004-06-26T23	38.35	35.43	35.463 89	0.033 885
2004-06-27T0	38.40	35.47	35.494 57	0.024 570
2004-06-27T1	38.43	35.51	35.510 34	0.000 343
2004-06-27T2	38.45	35.54	35.538 66	-0.001 340
2004-06-27T3	38.47	35.57	35.568 49	-0.001 510
2004-06-27T4	38.47	35.59	35.593 02	0.003 020
2004-06-27T5	38.49	35.62	35.614 05	-0.005 950
2004-06-27T6	38.50	35.67	35.624 79	-0.045 210
2004-06-27T7	38.51	35.69	35.637 94	-0.052 060
2004-06-27T8	38.53	35.71	35.649 67	-0.060 330

由于该模型 $n = 2$, 所选参数个数有限, 没有考虑河段中的支流和下断面的初始水位, 加之卷积水位数据时间段仅为 1 d, 因此, 在前几小时卷积出的水位误差较大, 表 1 中计算值仅供参考。从表中结果来看, 计算水位与实际水位基本吻合, 预报误差在允许范围内。

从本文的结论性公式中可以看出, 为了提高预报精度, 从理论上讲, 对于无任何支流的单一河段, RC 模型串联的级数越多则其预报精度越高。特别是对于流域复杂的河流, 可以优化 RC 模型结构, 如采取串并联混合型结构等。同时参数率定要选取尽可能多和采集间隔短的实测资料, 并利用计算机数值分析软件技术求出最佳模型参数。

6 结 语

水文预报利用各种预报模型和现代计算机技术对河流流域上发生的水文过程进行模拟, 本文建立的河段水位预报模型仅是对特定的河流区间进行模拟, 根据上游水位和当前下游水位, 预报在一定的洪峰传播时间后下游将达到的水位。该预报方法方便可行, 可作为其他洪水预报模型的一种辅助手段, 虽然实际应用意义不大, 但在水文和电子两门学科之间建立起了桥梁, 在理论上还有待于进一步深入的研究和探讨。

参考文献：

[1] 芮孝芳. 洪水预报理论的新进展及现行方法的适用性[J]. 水利水电科技进展, 2001, 21(5): 1-4.
[2] 王厥谋, 张瑞芳, 徐贯午. 综合约束线性系统模型[J]. 水利学报, 1986(7): 1-9.
[3] 南京工学院数学教研组. 积分变换[M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 1993: 79-83.
[4] 邱关源. 电路[M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 1989.
[5] 郑君里, 杨为理, 应启珩. 信号与系统[M]. 北京: 高等教育出版社, 1981: 1-50.
[6] 同济大学数学教研室. 高等数学[M]. 3 版. 上海: 同济大学出版社, 1992: 83-89.
[7] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析[M]. 4 版. 北京: 清华大学出版社, 2005: 287-289.

(收稿日期 2006-12-11 编辑 高建群)

