

DOI:10.3880/j.issn.1006-7647.2008.01.002

# 邓肯 $E-\nu$ 模型与 $E-B$ 模型比较

朱俊高<sup>1 2</sup>, 周建方<sup>1 2</sup>

(1. 岩土力学与堤坝工程教育部重点实验室, 江苏 南京 210098; 2. 河海大学岩土工程研究所, 江苏 南京 210098)

**摘要:**为探讨邓肯  $E-\nu$  模型和  $E-B$  模型的差异, 首先利用糯扎渡堆石料的两种模型参数计算各自模型所反映的泊松比, 并进行了比较分析, 然后对两种模型自身理论公式所反映的泊松比的差异进行分析, 最后, 以 261.5 m 高的糯扎渡心墙坝为例, 进行了有限元计算, 研究两种模型计算得到的坝体内不同位置处的应力水平、弹性模量和泊松比的差异, 进一步认识了两种模型的差异。  
**关键词:**  $E-\nu$  模型;  $E-B$  模型; 三轴试验; 泊松比; 心墙堆石坝; 糯扎渡水电站  
**中图分类号:** TU43      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1006-7647(2008)01-0004-04

**Comparison of Duncan's  $E-\nu$  and  $E-B$  models**//ZHU Jun-gao<sup>1 2</sup>, ZHOU Jian-fang<sup>1 2</sup>(1. Key Laboratory of Ministry of Education for Geomechanics and Embankment Engineering, Nanjing 210098, China; 2. Geotechnical Research Institute of Hohai University, Nanjing 210098, China)  
**Abstract:** For investigation of the difference between Duncan's  $E-\nu$  and  $E-B$  models, the parameters of the two models for rockfill of Nuozadu Dam were used for calculation of different Poisson's ratios reflected by the two models. Then, the difference between the Poisson's ratios reflected by the theoretical formulas of the two models was analyzed. Finally, finite element analysis was performed of the Nuozadu core rockfill dam of 261.5 m in height. The stress level and Young's modulus at different locations of the dam body and the difference between Poisson's ratios calculated by the two models were studied, and the differences between the two models were further investigated.  
**Key words:**  $E-\nu$  model;  $E-B$  model; triaxial test; Poisson's ratio; core rockfill dam; Nuozadu Hydropower Station

由于弹性非线性模型能较好模拟土体非线性变形性质, 且结构简单, 在土工结构有限元分析中得到广泛应用。邓肯模型作为土体弹性非线性模型的代表, 得到了最为广泛的应用。

早在 1970 年, 邓肯和张<sup>[1]</sup>就提出了著名的  $E-\nu$  模型。后来, 邓肯又提出了  $E-B$ <sup>[2]</sup>模型。本文对两种模型反映的不同应力状态下的弹性模量和泊松比进行了对比分析, 同时, 以糯扎渡心墙堆石坝为例, 研究了两种模型计算的坝体内部变形参数(弹性模量、泊松比)之间的差异, 从而更深刻地认识了这两种模型反映土体应力应变特性的能力。

## 1 邓肯 $E-\nu$ 模型及 $E-B$ 模型

邓肯  $E-\nu$  模型切线弹性模量  $E_t$  和泊松比  $\nu_t$  分别为<sup>[3]</sup>

$$E_t = (1 - R_f S)^2 K p_a \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \tag{1}$$

$$\nu_t = \frac{\nu_i}{(1 - A)^2} \tag{2}$$

其中, 应力水平  $S$ 、初始泊松比  $\nu_i$  及  $A$  为

$$S = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)(1 - \sin \varphi)}{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi} \tag{3}$$

$$\nu_i = G - F \lg \frac{\sigma_3}{p_a} \tag{4}$$

$$A = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)D}{K p_a \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n (1 - R_f S)} \tag{5}$$

式中:  $p_a$  为大气压力;  $c$  为黏聚力;  $\varphi$  为内摩擦角;  $D, F, G, K, n, R_f$  为模型参数。 $E-B$  模型切线弹性模量也由式(1)确定, 体积变形模量  $B_t$  由下式确定:

$$B_t = K_b p_a \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)^m \tag{6}$$

式中,  $K_b, m$  为模型参数。从而  $\nu_t$  可表示为

$$\nu_t = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{E_t}{3B_t} \right) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{(1 - R_f S)^2 K}{3K_b} \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)^{n-m} \right] \tag{7}$$

2 两种模型变形参数差异分析

2.1 两种模型泊松比的比较

前面各式表明,  $E-\nu$  模型和  $E-B$  模型在取同一实验数据条件下以及相同应力状态下, 弹性模量是相同的, 而反映侧向变形特性的泊松比不同。反映收缩、膨胀因素主要取决于泊松比<sup>[4]</sup>, 笔者经验表明, 在土石坝应力变形计算中, 泊松比的影响是显著的, 因此, 值得深入研究。不少研究人员认为  $E-B$  模型适应性较好, 因此许多情况下土石坝有限元分析习惯采用  $E-B$  模型, 这可能与  $E-B$  模型在  $E-\nu$  模型之后提出有关, 实际情况未必如此。  $E-\nu$  模型和  $E-B$  模型之间的差异主要取决于泊松比的取值差异, 当然, 泊松比的差异会导致结构内部应力的差异, 从而使两种模型分析过程中弹性模量产生差异。泊松比的取值差异究竟是如何引起的, 变化规律如何, 是本节讨论的重点。

根据式(2)、式(6)以及表1中的糯扎渡心墙坝Ⅰ区粗堆石料的参数, 计算得出两种模型在不同围压下泊松比的取值曲线, 如图1所示。从图1中可以看出, 泊松比随着应力水平增加而增加, 同一围压下,  $E-\nu$  模型的泊松比比  $E-B$  模型的泊松比大, 围压越大, 泊松比越小; 在围压较低的情况下, 应力水平的变化对  $E-\nu$  模型的泊松比影响较小, 曲线较缓, 对  $E-B$  模型的泊松比影响较大, 曲线较陡。总之, 两种模型的泊松比的差异是显著的。

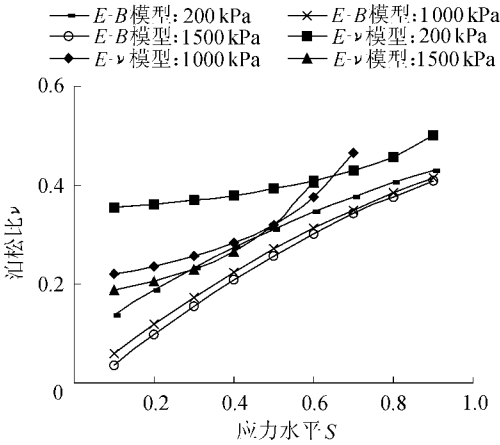


图1 糯扎渡主堆石料泊松比随应力水平变化曲线

从图1可以看出, 对本文讨论的这种材料,  $E-B$  模型的泊松比普遍比  $E-\nu$  模型的小。实际上,  $E-B$

表1 糯扎渡心墙堆石坝模型计算参数

| 材 料    | $\varphi_0(^{\circ})$ | $\Delta\varphi(^{\circ})$ | $K$  | $n$   | $K_b$ | $m$   | $R_f$ | $D$  | $G$  | $F$  |
|--------|-----------------------|---------------------------|------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|
| Ⅰ区粗堆石料 | 54.37                 | 10.47                     | 1491 | 0.241 | 683   | 0.101 | 0.719 | 7.65 | 0.41 | 0.20 |
| Ⅱ区粗堆石料 | 51.36                 | 9.58                      | 1400 | 0.175 | 474   | 0.145 | 0.706 | 8.26 | 0.36 | 0.16 |
| Ⅱ反滤料   | 52.60                 | 10.16                     | 1100 | 0.235 | 340   | 0.170 | 0.761 | 7.07 | 0.41 | 0.22 |
| Ⅰ反滤料   | 51.35                 | 8.70                      | 1000 | 0.115 | 400   | 0.103 | 0.678 | 6.08 | 0.44 | 0.21 |
| 心墙土料   | 39.47                 | 9.72                      | 388  | 0.311 | 206   | 0.257 | 0.755 | 2.89 | 0.36 | 0.08 |

模型计算的泊松比受模型参数整理方法的影响较大。式(7)显示, 泊松比取值与强度指标(包含于应力水平  $S$  中),  $R_f, K, n, K_b, m$  等有关。其中,  $R_f$  及强度指标一般受试验误差影响不大, 且对  $\nu$  值影响有限, 但  $K, n, K_b, m$  常常受整理方法的影响很大。如利用  $(\sigma_1 - \sigma_3) \sim \epsilon_a$  整理  $K, n$  值时, 如果试验剪切前加荷杆与试样帽没有完全接触, 这时, 整理参数时就应该将没有接触所引起的应变扣除, 但扣除多少, 不同整理者处理的方式可能不一致, 导致  $K, n$  值误差可能很大, 但  $K, n$  值的变化是协调的。即如果甲整理的  $K$  值比乙整理的大, 则甲的  $n$  值肯定比乙的小, 最终用来计算时仅限于对弹性模量的影响, 且影响有限。另一方面, 由  $(\sigma_1 - \sigma_3)/3 \sim \epsilon_v$  关系整理  $K_b, m$  值时, 存在类似问题导致这两个参数的误差。而当  $K, n$  值和  $K_b, m$  值的误差很不利时, 如  $n < m$  或  $K$  和  $K_b$  值与实际值相差较大时, 会导致泊松比异常, 一般情况下在低应力水平时  $E-B$  模型计算的泊松比过小。

为了了解两模型之间的联系, 首先讨论一下偏应力和体积应变之间的关系。

邓肯  $E-\nu$  模型中, 假定三轴试验得到的  $(\sigma_1 - \sigma_3) \sim \epsilon_a, \epsilon_r \sim \epsilon_a$  为双曲线关系, 其轴向应变、径向应变和偏应力之间存在如下关系:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\epsilon_a}{a + b\epsilon_a} \tag{8}$$

$$\frac{-\epsilon_r}{\epsilon_a} = f + D(-\epsilon_r) \tag{9}$$

式中:  $f$  为  $\epsilon_r/\epsilon_a \sim \epsilon_r$  线性关系的截距;  $\epsilon_r$  为径向应变。

$$\epsilon_r = \frac{1}{2}(\epsilon_v - \epsilon_a) \tag{10}$$

利用式(8)、式(9)和式(10), 令  $q = \sigma_1 - \sigma_3$  消去  $\epsilon_r$  和  $\epsilon_a$ , 得  $\sigma_1 - \sigma_3$  与  $\epsilon_v$  的关系:

$$\epsilon_v = \frac{q^2(Da^2 + ab - 2fab) + q(-a + 2fa)}{q^2(-Dab - b^2) + q(Da + 2b) - 1} \tag{11}$$

由式(11)看出  $E-\nu$  模型描述的  $q \sim \epsilon_v$  是和  $q, q^2$  项相关的复杂的曲线关系。  $E-B$  模型则假定在恒定围压下  $(\sigma_1 - \sigma_3)/3 \sim \epsilon_v$  是过原点的直线关系, 并将体积变形模量取值为试验曲线应力水平  $S = 70\%$  的点与原点连线的斜率。实际上, 笔者进行了若干三轴试

验资料的分析发现,恒定围压下(  $\sigma_1 - \sigma_3$  )/3  $\sim \epsilon_v$  直线关系并不很好。因此(  $\sigma_1 - \sigma_3$  )  $\sim \epsilon_v$  并不一定是直线关系,而大部分表现为曲线关系,但与  $E-\nu$  模型的式(11)所表示关系的吻合程度如何还有待于进一步试验资料的验证。因此,这里还难以判断哪种模型的泊松比取值更合理。

但是,笔者在曾经进行的若干土石坝有限元计算中发现,对  $E-B$  模型,如单元处于卸载状态且应力水平较高,甚至接近 1,即土体单元出现了破坏,这时其泊松比有时会很小,甚至小于零,这一点与临界状态土力学理论是不符合的。依据临界状态土力学理论,土体达到破坏时,体积应变为零,这时泊松比为 0.5。 $E-\nu$  模型由于泊松比与弹性模量分开计算,不会出现这种问题。因此,建议用式(7)计算泊松比时,弹性模量不宜用回弹模量;用式(6)求体积变形模量时,宜用当前小主应力,而不宜用历史上最大的小主应力。实际上就是式(7)中的  $\sigma_3$  宜用当前小主应力。

2.2 泊松比变化规律分析

对于  $E-B$  模型,泊松比随围压及应力水平的变化规律可从式(7)清楚地看出,若  $\sigma_3$  不变,则应力水平越大,泊松比越大;反之,泊松比越小;但若应力水平一定,泊松比随小主应力的变化是增大还是减小取决于  $n$  和  $m$  值的大小。经验表明,在多数情况下,  $n > m$ ,因此,相同应力水平下,  $\sigma_3$  越大,  $\nu$  越小,与一般认识一致。而且,不同  $\sigma_3$  下的  $S \sim \nu$  关系曲线不会交叉。但如果  $n < m$ ,则  $\sigma_3$  越大,  $\nu$  越大,与一般认识不符。如前所述,实际整理三轴试验结果时,有时处理不当,会出现  $n$  很小,从而,  $n < m$ ,从泊松比与围压关系的角度,这就不合理了,应予以注意。

为了进一步分析  $E-B$  模型中应力水平和(围压)小主应力对泊松比的影响,分别将式(7)对应力水平和小主应力求偏导数得

$$\frac{\partial \nu_1}{\partial S} = \frac{(1 - R_f S) K_f R_f}{3 K_b} \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)^{n-m} \quad (12)$$

$$\frac{\partial \nu_1}{\partial \sigma_3} = - \frac{1}{2} \frac{(1 - R_f S) K_f}{3 K_b p_a^{n-m}} (n - m) \sigma_3^{n-m-1} \quad (13)$$

可以看出,式(12)始终大于零,表明  $S$  提高,  $\nu$  增大。而且,从式(12)可以看出,  $S$  越大,  $\nu$  的变化率随应力水平增大而减小,从而,如图 1 所示,  $S$  越大,  $S \sim \nu$  关系曲线越趋于平缓;另一方面,  $n > m$  时,式(13)始终小于零,即  $\nu$  随  $\sigma_3$  增大而减小。同时从式(13)可以看出,由于一般情况下  $n - m - 1 < 0$ ,因此,  $\sigma_3$  越大,  $\nu$  的变化率绝对值越小。

对于  $E-\nu$  模型,式(2)和式(5)表明,  $S$  越大,  $\nu$  越小,与  $E-B$  模型反映的规律一致。另一方面,从

式(4)可清楚看出随  $\sigma_3$  增大,  $\nu_i$  减小。但在相同应力水平下,不同  $\sigma_3$  时,  $\nu$  的大小还难以判定,即此时  $\sigma_3$  越大,  $\nu$  未必越小;图 1 中不同  $\sigma_3$  下的  $S \sim \nu$  关系曲线相交也正说明了这一点。因此,当应力水平达到一定的数值,由应力水平引起的泊松比增量将大于由小主应力引起的泊松比减少量,则此时泊松比就随着小主应力的增加而增加。这似乎与一般认识不符,但实际上这是由于小主应力和应力水平共同影响的结果,符合土体变形规律。

3 工程实例计算分析

糯扎渡心墙堆石坝位于澜沧江下游干流上。最大坝高 261.5 m,上游坝坡坡度为 1:1.9,下游为 1:1.8。主要材料分区包括:Ⅰ区粗堆石料、Ⅱ区粗堆石料、反滤料、心墙料等。表 1 给出了各区土石料由三轴试验确定的  $E-\nu$  模型和  $E-B$  模型参数。利用河海大学岩土所 TDAD 三维有限元软件,对该坝进行了计算分析,得出两种模型计算的最大沉降和水平位移(表 2)。 $E-B$  模型计算的沉降比  $E-\nu$  模型的大 7.4%,这与  $E-B$  模型的泊松比较小有关。

表 2 竣工期糯扎渡心墙堆石坝沉降位移结果

| 模型         | 最大沉降量/<br>cm | 坝体上下游<br>水平位移/cm | 坝轴向位移/<br>cm    |
|------------|--------------|------------------|-----------------|
| $E-\nu$ 模型 | 248.9        | 33.8( - 34.02 )  | 18.1( - 19.64 ) |
| $E-B$ 模型   | 267.4        | 36.3( - 34.79 )  | 25.3( - 26.02 ) |

注:上下游水平位移 - 表示向上游,坝轴向位移 - 表示向左岸。

图 2~7 给出了竣工期两种模型计算的应力水平、泊松比和弹性模量等值线图。图 2 和图 3 表明,两种模型计算的应力水平分布规律相近,  $E-B$  模型的计算值略大。比较图 4 和图 5 可以看出,两种模型计算的泊松比不仅大小不同,分布规律也有明显差异。从图 4 可清楚地看出,  $E-B$  模型的泊松比在靠近上下游心墙的半坝高处最大,这是因为该区域应力水平较高,如前面所分析,  $E-B$  模型中应力水平对泊松比的影响较大。正因如此,尽管式(7)表明泊松比随围压增加而减小,在坝壳表层一定范围内泊松比反而表现为随深度增加而增大。对于  $E-\nu$  模型,由于泊松比随着围压的增大而降低,随应力水平增大而增大,且在应力水平较低时应力水平对泊松比的影响较小。因此,总体表现为坝壳内随深度增加泊松比减小。

尽管两种模型弹性模量的表达式相同,但图 6 和图 7 表明,它们所反映结构的弹性模量并不相同。这是由于两种模型的泊松比取值不同,导致应力不同,从而使弹性模量有差异。从图 6 和图 7 可以看出,这种差异并不大。总体上,  $E-\nu$  模型的弹性模量稍大。



图2 竣工期  $E-B$  模型应力水平等值线

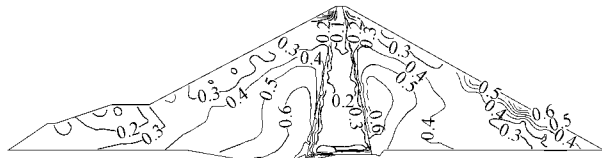


图3 竣工期  $E-\nu$  模型应力水平等值线

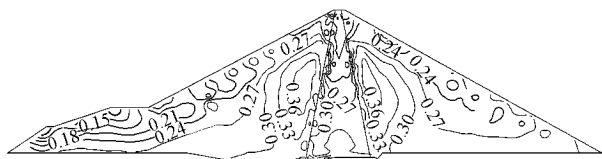


图4 竣工期  $E-B$  模型泊松比等值线

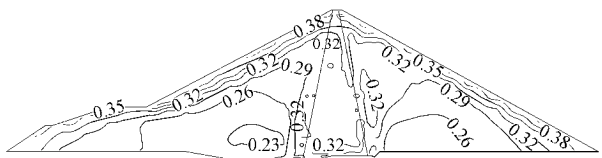


图5 竣工期  $E-\nu$  模型泊松比等值线



图6 竣工期  $E-B$  模型弹性模量等值线(单位:MPa)

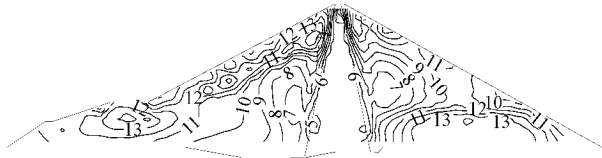


图7 竣工期  $E-\nu$  模型弹性模量等值线(单位:MPa)

## 4 结 语

本文对邓肯  $E-\nu$  模型和  $E-B$  模型的泊松比和弹性模量取值及分布规律进行了研究。两种模型均表现为泊松比随小主应力增大而减小、随应力水平增大而增大,与一般的认识一致;对  $E-B$  模型,应力水平对泊松比的影响显著,而在  $E-\nu$  模型中,应力水平较低时,泊松比受应力水平影响相对较小。两种模型所反映的结构内弹性模量有差异,但差异不大。

整理  $E-B$  模型参数时,一般应满足  $n > m$ 。使用该模型时,不宜用回弹模量或历史上最大的小主应力求泊松比,而宜用当前状态下的小主应力。

从泊松比的取值大小来看, $E-B$  模型和  $E-\nu$  模

型都有各自的缺陷,且笔者认为  $E-B$  模型的缺陷更值得注意。在高土石坝有限元计算中应考虑这一点,从而合理分析和选用由不同模型分析得到的应力应变。

值得指出,从本文结果看,还很难评价哪个模型更优。事实上,尽管  $E-B$  模型是在  $E-\nu$  模型之后提出的,但  $E-B$  模型只是在文献[2]的研究报告中提出。笔者曾亲询 Duncan 教授,迄今为止,该模型没有在任何正式的刊物或会议上发表。是不是该模型存在缺陷或者至少不比  $E-\nu$  模型更优,或其他什么原因,还难以确认。因此,国内不少人认为  $E-B$  模型优于  $E-\nu$  的说法至少从理论上还没有依据。

## 参考文献:

- [1] DUNCAN J M, CHANG Chin-yung Y. Non-linear analysis of stress and strain in soil[J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, 1970, 96(5): 1629-1653.
- [2] DUNCAN J M, BYRNE P, WONG K, et al. Stress-Strain and bulk modulus parameters for finite element analysis of stress and movements in soils masses, Report No. UCB/GT/80-01 [R]. Berkeley: Univ of California, 1980.
- [3] 钱家欢, 殷宗泽. 土工原理与计算[M]. 北京: 水力电力出版社, 1994.
- [4] 殷宗泽, 张坤勇, 朱俊高. 面板堆石坝应力变形计算中考虑土的各向异性[J]. 水利学报, 2004(11): 22-26.

(收稿日期: 2007-03-01 编辑: 方宇彤)

(上接第3页)

## 参考文献:

- [1] ACI Committee 446. Fracture mechanics of concrete: concepts, models and determinations of material properties: American concrete institute, special publication [R]. Farmington Hills: Elsevier Applied Science, 1991.
- [2] KTA 2202. Kerkraftwerken gegen Flugzeugabsturz, Grundsätze und Lastannahmen, Entwurf [R]. Koeln: Kerntechnischer Ausschuss (KTA), 1980.
- [3] RCC-G-80. Design and construction rules for civil works of 900 MWe PWR nuclear power plants [S].
- [4] RILEM, CEB, IABSE, et al. Concrete structure under impact and impulsive loading: introductory report and proceeding [R]. Berlin: BAM, 1982.
- [5] 藤井学, 宫本文穗. 击荷重化におけるコンクリート构造物の撓曲[J]. コンクリート工学, 1983, 25(9): 25-36.
- [6] MIYAMOTO A, KING M W, FUJII M. Analysis of failure modes for reinforced concrete slabs under impulsive loads [J]. ACI Structural Journal, 1991, 88(5): 538-545.
- [7] MIYAMOTO A, KING M W, FUJII M. Nonlinear dynamic analysis of reinforced concrete slabs under impulsive loads [J]. ACI Structural Journal, 1991, 88(4): 411-419.

(收稿日期: 2007-01-18 编辑: 方宇彤)