

非饱和土水力和力学性状耦合的弹塑性模型研究进展

孙德安, 向黎

(上海大学土木工程系, 上海 200072)

摘要 对非饱和土力学的研究现状进行回顾, 在总结前人研究成果并结合当前研究趋势的基础上介绍了能耦合模拟非饱和土水力和力学性状的弹塑性模型。该模型综合考虑到了饱和度对应力应变关系和强度以及变形对水力性质的交叉影响。给出了将耦合弹塑性模型应用于非饱和土体固结问题中进行有限元数值计算的公式。

关键词 非饱和土力学; 弹塑性模型; 应力应变关系; 水力特性; 有限元数值分析

中图分类号 :TU458+.3 **文献标识码** :A **文章编号** :1006-7647(2008)01-0082-04

Advances in research on elastoplastic simulation of coupled hydraulic and mechanical behaviors of unsaturated soils//SUN De-an, XIANG Li / *Department of Civil Engineering, Shanghai University, Shanghai 200072, China*

Abstract : An introduction was given to the elastoplastic model for simulating the coupled hydraulic and mechanical behaviors of unsaturated soils based on a review of current research on unsaturated soils and summary of the former achievements and the trend of research. In this model, the effect of soil saturation on the stress-strain relationship and the effects of deformation of soils on hydraulic behaviors were taken into account. Then, formulas for finite element analysis of consolidation of unsaturated soils based on the coupled elastoplastic model were given.

Key words : unsaturated soil mechanics; elastoplastic model; stress-strain relationship; hydraulic behavior; finite element analysis

1 非饱和土力学的研究现状

1.1 Bishop 与 Fredlund 的理论

从 20 世纪 50 年代开始, 就有人从事非饱和土力学的研究, Bishop^[1]提出了下列非饱和土有效应力公式:

$$\sigma' = (\sigma - u_a) + \chi s \quad (1)$$

式中: σ' 为非饱和土的有效应力; σ 为总应力; u_a 为孔隙气压; s 为吸力, $s = u_a - u_w$ (u_w 为孔隙水压); χ 为与饱和度有关的参数。Bishop 等人想用单一的有效应力作为非饱和土的应力状态量来描述非饱和土的强度和变形。但是后来 Jennings 等^[2]指出用 Bishop 的有效应力不能解释非饱和土因浸水引起的湿化现象。也就是说, 由式(1)可知, 浸水时吸力减小, Bishop 的有效应力也减小, 因而计算得到的体积应该是膨胀, 而实际上非饱和土体积缩小。因此, 不能用单一的有效应力来解释和预测非饱和土的力学行为。

Fredlund 等^[3]用连续介质力学的方法证明了对于非饱和土的力学问题应该采用净应力($\sigma - u_a$)和

吸力(s)作为其应力状态变量, 并提出如下非饱和土的强度公式:

$$\tau_f = c' + (\sigma - u_a) \tan \varphi' + (u_a - u_w) \tan \varphi_b \quad (2)$$

式中: c' 为有效黏聚力; $\tan \varphi'$ 为净法向应力的内摩擦系数; $\tan \varphi_b$ 为吸力的有效内摩擦系数。

此后许多人也采用双应力变量(净应力和吸力)建立了许多非饱和土的非线性弹性本构模型^[4-5]。但是, 这种非线性弹性模型不能正确地描述非饱和土的许多力学性质, 如剪胀剪缩性、低应力下的膨胀性和高应力下的湿化性质以及不能区分可恢复变形与不可恢复变形等。

1.2 非饱和土的弹塑性本构模型的出现

20 世纪 80 年代末西班牙学者 Alonso 等^[6]首次提出非饱和土的弹塑性本构模型, 该模型可以描述非膨胀性非饱和土的基本力学特性。该模型最重要的部分是荷载湿化屈服曲线(LC 屈服线), 有了它, 模型可预测非饱和土最重要的变形特性——湿化变形。后来一些其他学者, 如 Wheeler 等^[7]也验证了非饱和土的弹塑性力学模型。孙德安等^[8]也提出了一个非饱和土的三维弹塑性模型, 并用吸力控制三

轴压缩和三轴伸长试验结果对模型进行了验证,比较结果表明,该模型可以表现包括湿化变形在内的三维应力状态下的非饱和土的力学行为。然后把该模型推广到可以统一考虑非饱和击实土的初始密度影响的三维弹塑性模型^[9],并用大量的吸力控制三轴湿化试验结果^[10]对该模型进行验证。

1.3 非饱和土的水力和力学性状耦合的弹塑性模型

以上提到的非饱和土的弹塑性模型都只能预测变形和强度,而不能直接预测非饱和土的水分特性或饱和度。众所周知,非饱和土的饱和度不像饱和土的饱和度一样总是 100%,而是随着吸力以及土的变形状态而变化,也就是说饱和度对变形、变形对非饱和土的水力特性都会产生影响。因此,仅能预测非饱和土的变形和强度的弹塑性力学模型是不完全的,它不能同时预测非饱和土的水力特性和力学特性。人们很早就对土的水力特性——保水性进行了研究,用水分特征曲线来表示非饱和土的保水性。其中以 Brooks 等^[11]和 Genuchten 等^[12]提出的水分特性曲线模型较为著名。水分特征曲线模型只能预测非饱和土的保水性,而不能预测非饱和土的变形和强度等力学性质。而现实中非饱和土在受到外力(包括净应力和吸力)的作用时,就会同时产生水力方面(如饱和度)和力学方面(如变形和强度)的变化。因此,仅用现有的非饱和土的弹塑性力学模型或水分特征曲线模型都不能正确地同时预测非饱和土的水力性状和力学性状。针对这种状况,近年来国际上为数极少的学者开始关注能不能用弹塑性力学方法来建立可以同时预测非饱和土的水力性状和力学性状的数学模型。Wheeler 等^[13]提出可以定性地预测等向应力状态下非饱和土的水力滞回性和应力应变关系的弹塑性模型,同时给出了一些定性的预测。

2 笔者等人的耦合本构关系

2.1 非饱和土的应力状态变量

为了更恰当地确定非饱和土的水力和力学性状,模型采用的应力状态变量是“平均骨架应力” σ_{ij}' 和吸力 s ,应变状态变量是土体骨架应变张量 ε_{ij} 和饱和度 S_r 。“平均骨架应力”张量被定义为

$$\sigma_{ij}' = \sigma_{ij} - u_a \delta_{ij} + S_r s \delta_{ij} \quad (3)$$

式中: σ_{ij} 为总应力, S_r 为饱和度; u_a 为孔隙气压; δ_{ij} 为克朗内科(Kronecker)符号。

2.2 非饱和土的水力特性

笔者用吸力控制的三轴仪^[10]在各向等压和三轴应力下进行了大量非饱和土的湿化试验,得出特

定土样的土水特征曲线主要与孔隙比有关而与应力状态无直接关系的结论^[15],总结出土水特征曲线的简单模型如图 1 所示,可用如下公式表示^[14]。

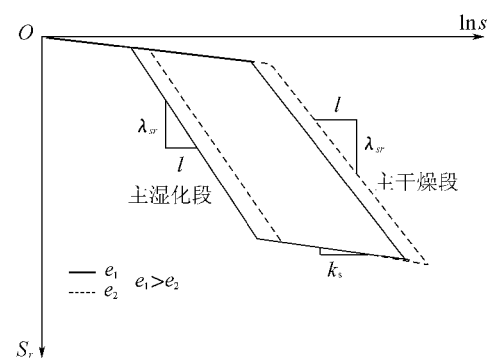


图 1 不同孔隙比下的水分特征曲线模型
在主要干燥和湿化曲线段:

$$S_r = S_r^0(e) - \lambda_{sr} \ln \frac{s}{p_a} \quad (4)$$

在扫描曲线段:

$$S_r = S_r^0(e) - k_s \ln \frac{s}{p_a} \quad (5)$$

孔隙比 e 对饱和度 S_r 的影响用下面的公式来反映:

$$S_r^0(e) = S_{r0} - \lambda_{se}(e - e_0) \quad (6)$$

因此可得到如下公式:

$$dS_r = -\lambda_{se} de - \lambda_{sr} \frac{ds}{s} \quad (7)$$

$$dS_r = -\lambda_{se} de - k_s \frac{ds}{s} \quad (8)$$

式中: λ_{sr} 、 k_s 分别为等孔隙比条件下水分特征曲线的主要干燥和湿化线的斜率和扫描线的斜率(图 1); λ_{se} 为吸力不变条件下饱和度与孔隙比直线关系的斜率; p_a 为大气压力; S_{r0} 为吸力为大气压和孔隙比为 e_0 时的饱和度。

2.3 各向等压应力状态下的本构关系

以前建立的非饱和土弹塑性模型^[8]采用了 Alonso 模型^[6]在各向等压应力状态下 p - s 平面的 LC 屈服线。在这里除了采用式(3)定义的“平均骨架应力”外,其他都采用 Alonso 模型的公式,即

$$p_y' = p_n' \left(\frac{p_{0y}}{p_n'} \right)^{\frac{\lambda(0) - \kappa}{\lambda(s) - \kappa}} \quad (9)$$

式中: p_{0y} 、 p_y' 分别为饱和土的屈服应力和非饱和土在吸力为 s 时的屈服应力; p_n' 为当吸力减小时不发生湿化的等向应力; κ 是非饱和土的膨胀指数; $\lambda(0)$ 、 $\lambda(s)$ 分别为饱和土和具有吸力 s 的非饱和土在 e - $\ln p'$ 平面上的压缩曲线的斜率, $\lambda(s)$ 可用下式表示^[8]:

$$\lambda(s) = \lambda(0) + \frac{\lambda_s s}{p_a + s} \quad (10)$$

式中: λ_s 为材料参数,反映了 $\lambda(s)$ 随着吸力 s 而变

化。从式(9)可以得出

$$dp_y' = \frac{\partial p_y'}{\partial p_{0y}} dp_{0y} + \frac{\partial p_y'}{\partial s} ds \tag{11}$$

其中

$$\frac{\partial p_y'}{\partial p_{0y}} = \frac{\lambda(0) - \kappa \left(\frac{p_{0y}}{p_n'} \right)^{\frac{\lambda(0) - \lambda(s)}{\lambda(s) - \kappa}}}{\lambda(s) - \kappa} \tag{12}$$

$$\frac{\partial p_y'}{\partial s} = \frac{\lambda_s p_y' p_a (\lambda(0) - \kappa)}{(\lambda(s) - \kappa) (p_a + s)} \ln \left(\frac{p_n'}{p_{0y}} \right) \tag{13}$$

当应力状态处于 LC 屈服线以内,弹性体积应变增量为

$$d\epsilon_v^e = \frac{\kappa dp'}{(1 + e)p'} \tag{14}$$

当应力状态处于 LC 屈服线上,塑性体积应变增量为

$$d\epsilon_v^p = \frac{(\lambda(0) - k) \lambda dp_{0y}}{(1 + e)p_{0y}} \tag{15}$$

从图2中可以看出,除了LC屈服线以外,为了反映非饱和土的水力特性的弹塑性过程,本模型增加了SI屈服线(当吸力增加时的屈服线)和SD屈服线(当吸力减小时的屈服线)来描述饱和度的塑性屈服。当在干化过程($s \geq s_I$)或湿化过程($s \leq s_D$)中吸力改变时,饱和度的增量按式(7)计算,否则饱和度的增量由式(8)计算。因此,按照应力状态(p 和 s)和屈服线(LC,SI,SD)关系,用不同公式计算应变和饱和度。

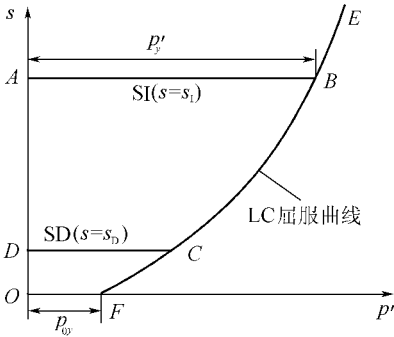


图2 各向等压应力状态下的 LC, SI, SD 屈服线

2.4 轴对称应力状态下的本构关系

本模型的屈服函数(f)和塑性势函数(g)如下

$$f = g = q^2 + M^2 p' (p' - p_y') = 0 \tag{16}$$

假定在“平均骨架应力”空间中满足关联流动法则：

$$d\epsilon_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}'} \tag{17}$$

式中比例常数 Λ 可由协调条件推出。式(16)可写成 $f = f(p', q, p_y') = 0$, 由此得到

$$df = \frac{\partial f}{\partial p'} dp' + \frac{\partial f}{\partial q} dq + \frac{\partial f}{\partial p_y'} dp_y' = 0 \tag{18}$$

将式(11)代入式(18)后,重新排列可得到

$$df = \frac{\partial f}{\partial p'} dp' + \frac{\partial f}{\partial q} dq + \frac{\partial f}{\partial p_y'} \frac{\partial p_y'}{\partial p_{0y}} dp_{0y} +$$

$$\frac{\partial f}{\partial p_y'} \frac{\partial p_y'}{\partial s} ds = 0 \tag{19}$$

式中饱和土的等向等压屈服应力 p_{0y} 与塑性体积应变 ϵ_v^p 的关系,与剑桥模型一致。由于 ϵ_v^p 是现在模型的硬化参数,在饱和土中的塑性体积应变增量 $d\epsilon_v^p$ 是由 dp_{0y} 引起,而在非饱和土中,由 dp_y' 或 ds 引起。因此由式(15)和式(17)得到

$$dp_{0y} = \frac{1 + e}{\lambda(0) - \kappa} p_{0y} d\epsilon_v^p = \frac{1 + e}{\lambda(0) - \kappa} p_{0y} \Lambda \frac{\partial f}{\partial p'} \tag{20}$$

将式(20)代入式(19)可以解出 Λ ：

$$\Lambda = - \frac{\frac{\partial f}{\partial p'} dp' + \frac{\partial f}{\partial q} dq + \frac{\partial f}{\partial p_y'} \frac{\partial p_y'}{\partial s} ds}{\frac{\partial f}{\partial p_y'} \frac{\partial p_y'}{\partial p_{0y}} p_{0y} \frac{1 + e}{\lambda(0) - \kappa} \frac{\partial f}{\partial p'}} \tag{21}$$

从式(17)~(21)可以计算出由平均骨架应力增加或吸力减小引起的塑性体积应变增量^[16]。

上述模型已进一步推广到三维应力状态下的水力与力学特性耦合的弹塑性模型^[17]。

3 非饱和土固结问题的有限元数值计算

3.1 应力和应变状态变量的说明

在岩土工程问题中孔隙气压往往是大气压,一般作为常量考虑,因此吸力被简化为负的孔隙水压,即 $s = -u_w$ 。平均骨架应力为

$$\sigma' = \sigma - S_r u_w \tag{22}$$

3.2 有限元用的本构关系

有限元数值计算用的增量形式为

$$d\sigma_{ij}' = D_{ijkl} d\epsilon_{kl} + W_{ij}^{ep} ds \tag{23}$$

$$dS_r = \lambda_{se} (1 + e) \delta_{kl} d\epsilon_{kl} + \frac{\lambda_i}{s} ds \tag{24}$$

其中

$$D_{ijkl} = \mathbf{D}_{ijkl}^e - \mathbf{D}_{ijmn}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}'} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{st}'} \frac{\mathbf{D}_{stkl}^e}{X} \tag{25}$$

$$W_{ij}^{ep} = \frac{\partial f}{\partial p_y'} \frac{\partial p_y'}{\partial s} D_{ijkl} \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}'}}{X} \tag{26}$$

而

$$X = - \frac{1 + e}{\lambda(0) - \kappa} p_{0y} \frac{\partial f}{\partial p_y'} \frac{\partial p_y'}{\partial p_{0y}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}'} \delta_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}'} \mathbf{D}_{ijkl}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}'} \tag{27}$$

式中 $\mathbf{D}_{ijkl}^e$ 为弹性本构张量; λ_i 在扫描曲线段时 $\lambda_i = k_s$, 在主要干燥和湿化曲线段时 $\lambda_i = \lambda_{sr}$ 。

3.3 控制方程

土体中力的平衡方程^[18]

$$\sigma_{ij,j} + \mathbf{F}_i = 0 \tag{28}$$

式中 $\mathbf{F}_i$ 为体积力向量。

$$\operatorname{div}(\rho_w v) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho_w n S_r) = 0 \quad (29)$$

式中 div 为散度符号; ρ_w 、 v 分别为孔隙流体密度和流速; n 为孔隙率。

4 结 语

a. 本文简述了非饱和土的水力和力学特性耦合的弹塑性模型,该模型考虑到了吸力和饱和度对应力应变关系的影响以及变形对非饱和土保水性的影响。

b. 用有限元方法把水力-力学模型用到实际边界值问题中,在理论上和实际工程中都非常有意义。Sheng 等^[19]已经把概念性的非饱和土的水力-力学模型引到有限元数值计算中,并给出了简单的计算实例。经过试验数据验证过的水力-力学弹塑性模型可用来解决实际工程问题,例如非饱和土斜坡因下雨而引起的变形和破坏问题。

参考文献:

[1] BISHOP A W. The principle of effective stress[J]. Tek Ukeblad ,1959 ,39 :859-863.

[2] JENNINGS J E B ,BURLAND J B. Limitation to the use of effective stress in partly saturated soils[J]. Geotechnique , 1961 ,12(2) :125-144.

[3] FREDLUND D G ,MORGENSTERN N R. Stress state variable for unsaturated soils[J]. Canadian Journal of Geotechnical Engineering ,ASCE ,1977 ,103(5) :447-466.

[4] FREDLUND D G. Appropriate concepts and technology for unsaturated soil[J]. Canadian Geotechnical Journal ,1979 ,16 : 121-139.

[5] LLORET A ,ALONSO E E. State surfaces for partially saturated soils [C]//International Society of Soil Mechanics and Foundation Engineering. Proceedings of 11th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. San Francisco :A. A. Balkmemia ,1985 ,2 :557-562.

[6] ALONSO E E ,GENS A ,JOSA A. A constitutive model for partially saturated soils[J]. Geotechnique ,1990 ,40(3) :405-430.

[7] WHEELER S J ,SIVAKUMAR V. An elastoplastic critical state framework for unsaturated soil[J]. Geotechnique ,1995 ,45(1) : 35-53.

[8] SUN De-an ,MATSUOKA H ,YAO Yang-ping ,et al. An elastoplastic model for unsaturated soil in three-dimensional stresses[J]. Soils and Foundations ,2000 ,40(3) :17-28.

[9] SUN De-an ,MATSUOKA H ,CUI Hong-bin ,et al. Three-dimensional elastoplastic model for unsaturated compacted soils with different initial densities[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics ,2003 ,27

(10) :1079-1098.

[10] SUN De-an ,MATSUOKA H ,XU Yong-fu. Collapse behavior of compacted clays by suction-controlled triaxial tests[J]. ASTM Geotechnical Testing Journal ,2004 ,27(4) :362-370.

[11] BROOKS R H ,COREY A T. Hydraulic properties of porous media[D]. Fort Collins :Colorado State University ,1964.

[12] Van GENUCHTEN M T H ,NIELSEN D R. On describing and predicting the hydraulic properties of unsaturated soils[J]. Annual Geophysics ,1985 ,3 :615-628.

[13] WHEELER S J ,SHARMA R S ,BUISSON M S R. Coupling of hydraulic hysteresis and stress-strain behaviour in unsaturated soil[J]. Geotechnique ,2003 ,53(1) :41-54.

[14] SUN De-an ,SHENG Dai-chao. An elastoplastic hydro-mechanical model for unsaturated compacted soils[C]// TARANTINO A ,ROMERO E ,CUI Yu-jun. Proc International Symposium on Advanced Experimental Unsaturated Soil Mechanics. Trento :A. A. Balkmemia ,2005 :249-255.

[15] SUN De-an ,SHENG Dai-chao ,XU Yong-fu. Collapse behaviour of unsaturated compacted soils with different initial densities[J]. Canadian Geotechnical Journal ,2007 ,44(6) : 673-686.

[16] SUN De-an ,SHENG Dai-chao ,SLOAN S W. Elastoplastic modelling of hydraulic and stress-strain behaviour of unsaturated compacted soils[J]. Mechanics of Materials , 2007 ,39(3) :212-221.

[17] SUN De-an ,CUI Hong-bin ,MATSUOKA H , et al. A three-dimensional elastoplastic model for unsaturated compacted soil with hysteresis[J]. Soils and Foundations ,2007 ,47(2) :253-264.

[18] SHENG Dai-chao ,SLOAN S W ,GENS A ,et al. Finite element formulation and algorithms for unsaturated soils [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics ,2003 ,27 :745-765.

[19] SHENG Dai-chao ,SLOAN S W ,GENS A. A constitutive model for unsaturated soils :thermomechanical and algorithmic aspects[J]. Computational Mechanics ,2004 ,33 :453-465.

(收稿日期 2007-04-04 编辑 方宇彤)

