

管道系统泄漏检测的全频域法

杨开林 郭新蕾

(中国水利水电科学研究院水力学所,北京 100038)

摘要 :针对长距离管道输水系统的特点,建立了适合各种边界条件的管道水击频域数学模型,并应用拉氏变换原理导出了实测离散函数的频域数学模型。在此基础上,提出完全在频域中检测管道泄漏的新方法,即管道泄漏检测的全频域法。全频域法与之前频域法的差别有两点:一是边界条件不受限制,二是泄漏检测完全在频域中完成,无需求解任何一点的傅里叶逆变换时域函数。最后通过数字算例检验了管道泄漏检测全频域法的可行性。

关键词 :管道泄漏;泄漏检测;全频域法;水击;水力瞬变

中图分类号 :TU991.32 **文献标识码** :A **文章编号** :1006-7647(2008)03-0040-05

Pure frequency domain method for pipeline leakage detection in water diversion projects//YANG Kai-lin, GUO Xin-lei
(Department of Hydraulics, China Institute of Water Resources and Hydropower Research, Beijing 100038, China)

Abstract : In consideration of the characteristics of pipeline system in long distance water diversion projects, a water hammer frequency domain model, suitable for various boundary conditions and incorporating the Laplace transform of the discrete measured data in the frequency domain, is established. A novel method for pipeline leak detection called the pure frequency domain method is proposed. Compared with previous frequency response methods, the pure frequency domain method has two advantages: the boundary conditions are unconstrained and the leak detection is carried out only in the frequency domain, without calculation of the inverse Fourier transform function. Finally, the model is verified through application to a practical problem.

Key words : pipeline leakage; leakage detection; pure frequency domain method; water hammer; hydraulic transient

管道泄漏是一种常见事故。即使管道在铺设时达到设计质量标准,但由于管道的老化、腐蚀、磨损断裂等原因,泄漏仍旧不可避免。据文献[1]记载,在美国,相对较新的城市管网中泄漏损失一般达25%,而老管网中泄漏损失高达50%;在英国,泄漏损失一般达30%~40%。我国一些小城镇供水管网中水量净漏失率有的达到14%,远未达到国家要求城市漏失率控制在6%以下的标准^[2]。管道一旦发生泄漏事故,除了影响正常的生产外,还会因为流体流失造成经济损失,当输送液体有强腐蚀性,如液体为海水等,管道泄漏会对环境产生污染。

长管道的泄漏检测,包括检测泄漏位置和泄漏量,是一项复杂的系统工程。目前在国际上管道输水系统的泄漏检测研究越来越引起重视,研究的热点主要是瞬变检测法,因为在瞬变条件下即使发生微小的泄漏,在管道泄漏发生前后的水压波形存在较大差别,与其他方法比较,这一方法可以更好地确

定泄漏发生的位置。

瞬变检测法可分为时域法和频域法。早期的研究主要是时域法。采用时域法,一般需要测量管道进出口流量及水压随时间的变化过程^[3]。目前,大直径管道流量传感器测量的偏差在0.5%~2.0%之间,压力传感器的测量偏差在0.05%~0.10%之间,也就是说,压力的测量精度远高于流量。另外,瞬时流量传感器如常用的超声波流量计,在检测周期较小时测量值受随机噪声信号的影响很大,真实特性时间历程的辨识比较困难。更重要的是流量传感器比压力传感器价格高得多。基于这些原因,泄漏检测方法的一个发展方向是减少对瞬变流量信号的依赖,通过对管道压力信号的辨识来进行泄漏定位。在这一背景下,泄漏检测的频域法逐渐成为目前国际上的研究重点。

Mpesha等^[1]研究了上游为水库(水位恒定)、下游为可以产生正弦周期扰动的阀门条件的管道系统

基金项目:国家自然科学基金(50679085);国家社会公益专项基金(126301041003);中国水利水电科学研究院配套专项基金(水集05KY01)
作者简介:杨开林(1955—),男,四川西充人,教授级高级工程师,博士,从事水力瞬变、管道泄漏检测、河冰工程研究。E-mail: ykcliwhr@sohu.com

泄漏检测频域数学模型。研究表明,与时域法不同,频域法只需测量 1 个位置如阀门处的流量和压力信号就可以完成泄漏检测任务,并且具有很高的定位准确性,即使泄漏流量只有稳态流量的 0.5%,也可以用频域法进行泄漏检测和定位。文献 [1] 方法的优点是明显的,但实施较为困难,因为需要阀门不断启闭产生等幅正弦周期扰动,这对阀门控制要求高、投资大。王通等^[4]采用类似频域模型,但将阀门的扰动改为快速关闭,产生一个流量脉冲扰动,通过瞬态压力值(传递函数)的谐波分析,实现输油管道有无泄漏的检测。Wang 等^[5]基于阀门突然关闭后,微小的泄漏也会大幅度影响水击波动的振幅衰减速度,提出了一个适用于等直径简单管道的泄漏检测方法,将泄漏等效为一个水力阻力衰减因子,采用傅里叶变换求解水击偏微分方程,通过分析傅里叶变换各分量频率特性确定泄漏量和泄漏位置。Wang 等的方法只需管道出口阀门突然关闭产生一个流量脉冲扰动,理论上,该方法可以检测 0.1% 以上的泄漏量,并进行泄漏定位。但该方法不能应用于复杂管线如不同管径的情况。Lee 等^[6]研究了更为复杂的情况,考虑了非恒定流水头损失系数的影响,基于系统的频域响应,比较不同峰值之间的相对大小确定泄漏位置。Kim^[7]考虑了层流和紊流非恒定流水头损失,把脉冲响应法应用于泄漏检测,采用拉氏变换得到系统的频域响应模型,采用遗传优化算法确定泄漏量和泄漏位置。这些方法的共同点是在确定泄漏位置和泄漏量的过程中,需求出检测点水压或者流量傅里叶频域函数的逆变换。换句话说,现有频域法不是纯粹在频域范畴内分析求解,它们需要部分时域信息。对于复杂系统这有时是一件困难的事情。本文旨在建立适合各种边界条件的管道水击频域数学模型,然后应用拉氏变换导出检测点水压或者流量实测离散函数的频域模型。在此基础上,提出完全在频域中检测管道泄漏的理论新方法。

1 管道泄漏检测的全频域法数学模型

1.1 管道水力瞬变频域模型

考虑水流和管壁弹性影响时,管道中的水力瞬变可由偏微分方程组描述如下:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{f|Q|Q}{2gDA^2} &= 0 \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

式中: H 为从基准线算起的测压管水头, m ; Q 为管道流量, m^3/s ; A 为管路断面面积, m^2 ; g 为重力加速度, m/s^2 ; x 为距离, m ; t 为时间, s ; f 为达西沿程阻

力系数; D 为管路直径, m ; a 为水击波速, m/s 。

管道泄漏流量一般不到初始流量的 10%, 可以采用小扰动理论线性化模型研究。在稳态工况点线性化方程组(1)可转化为

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\Delta H)}{\partial x} + \frac{1}{gA} \frac{\partial(\Delta Q)}{\partial t} + \frac{f|Q_0|\Delta Q}{gDA^2} &= 0 \\ \frac{\partial(\Delta H)}{\partial t} + \frac{a^2}{gA} \frac{\partial(\Delta Q)}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

用相对值表示,式(2)可改写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial l} + T_w \frac{\partial q}{\partial t} + \kappa q &= 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{T_w}{T_l^2} \frac{\partial q}{\partial l} &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

其中

$$\begin{aligned} T_w &= \frac{Q_r L}{gAH_r} & \kappa &= \frac{f|Q_0|Q_r L}{gDA^2 H_r} \\ T_l &= \frac{L}{a} & h &= \frac{\Delta H}{H_r} = \frac{H - H_0}{H_r} \\ l &= \frac{x}{L} & q &= \frac{\Delta Q}{Q_r} = \frac{Q - Q_0}{Q_r} \end{aligned}$$

式中: L 为特征长度,一般取管道的总长; T_l 为管道水击的半反射时间; T_w 为水流惯性时间常数;下标 r 表示参考基准值,一般取额定值;下标 0 表示在 t_0 时刻。

取拉氏变换,偏微分方程(3)又可转变为代数方程:

$$h = h_U \cosh \gamma l - \frac{T_w \gamma}{s T_l^2} q_U \sinh \gamma l \tag{4}$$

$$q = -\frac{s T_l^2}{T_w \gamma} h_U \sinh \gamma l + q_U \cosh \gamma l \tag{5}$$

其中

$$\gamma = T_l s \sqrt{1 + \frac{\kappa}{T_w s}}$$

式中下标 U 表示管道进口断面。为了书写方便,约定当方程中有算子 s 时,方程中的变量就代表拉氏变换函数,则 $h = h(s, l)$ 和 $q = q(s, l)$ 均为拉氏变换函数。

令 $s = j\omega$, $j = \sqrt{-1}$, 对任一管道,由式(4)和式(5)可得任意点 l 以矩阵方程描述的管道水力瞬变的频域解:

$$X = AX_U \tag{6}$$

其中

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} q \\ h \end{bmatrix} & X_U &= \begin{bmatrix} q_U \\ h_U \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} \cosh \gamma l & -\frac{j\omega T_l^2}{T_w \gamma} \sinh \gamma l \\ -\frac{T_w \gamma}{j\omega T_l^2} \sinh \gamma l & \cosh \gamma l \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\gamma = j\omega T_l \sqrt{1 + \frac{\kappa}{j\omega T_w}}$$

习惯上称式(6)为管道的场矩阵方程, A 为场矩阵。

1.2 离散函数的频域模型

管道泄漏检测的一个重要环节是把检测点实测信号与理论值进行比较。在一般情况下实测信号是时域物理量,如水压或流量与时间的离散数据。以前的做法是将理论频域函数通过傅里叶逆变换到时域,这在系统复杂时是很困难的。但是,为了在频域中进行这一工作,必须解决实测离散时域函数的频域变换。

实测的水压或流量信号 u 如图 1(a)所示, u 是微机采样时间 T 的离散函数。由于 T 非常短,可以用图 1(b)中连续阶梯函数近似。

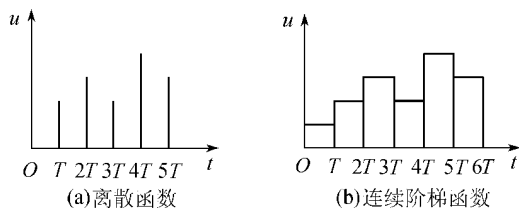


图 1 离散函数转换为连续阶梯函数

连续阶梯函数的数学描述为

$$u(t) = u_i \quad (7)$$

其中 $iT \leq t < (i+1)T$ $i = 0, 1, 2, \dots$

根据拉氏变换的定义,函数 $u(t)$ 的拉氏变换为

$$u(s) = \int_0^\infty u(t) e^{-st} dt = \int_0^T u_0 e^{-st} dt + \int_T^{2T} u_1 e^{-st} dt + \int_{2T}^{3T} u_2 e^{-st} dt + \dots$$

$$\text{即 } u(s) = u_0 \frac{1 - e^{-Ts}}{s} + u_1 \frac{1 - e^{-Ts}}{s} e^{-Ts} +$$

$$u_2 \frac{1 - e^{-Ts}}{s} e^{-2Ts} + \dots =$$

$$\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \sum_{i=0}^{\infty} u_i e^{-iT_s}$$

令 $s = j\omega$, 可得连续阶梯函数的频域变换为

$$u(j\omega) = \frac{1 - e^{-jT\omega}}{j\omega} \sum_{i=0}^{\infty} u_i e^{-ijT\omega} \quad (8)$$

由于实际的水击过程持续时间很短,式(8)中的无穷级数可以用有限级数表示,即

$$u(j\omega) = \frac{1 - e^{-jT\omega}}{j\omega} \sum_{i=0}^n u_i e^{-ijT\omega} \quad (9)$$

式中 n 为整数。

1.3 泄漏边界条件频域模型

管道泄漏流量可描述为

$$Q_l = Q_{l0} \frac{\sqrt{H_l - Z_l}}{\sqrt{H_{l0} - Z_l}} \quad (10)$$

式中: Q_l 为泄漏点泄漏流量; H_l 为泄漏点测压管水头; Z_l 为泄漏点位置高程。在已知初始泄漏流量 Q_{l0} 的条件下,任意时刻泄漏流量可由式(10)确定。

对式(10)线性化,可得

$$q_l = \tau h_l \quad (11)$$

$$\text{其中 } q_l = \frac{\Delta Q_l}{Q_r} \quad h_l = \frac{\Delta H_l}{H_r}$$

$$\tau = \frac{Q_{l0} H_r}{2(H_{l0} - Z_l) Q_r}$$

在泄漏检测过程中,泄漏点位置 l 和初始泄漏流量 Q_{l0} 是未知量。

在泄漏点,连续性方程为

$$Q_{l,u} - Q_{l,d} = Q_l \quad (12)$$

式中: $Q_{l,u}$ 为泄漏点上游管道流量; $Q_{l,d}$ 为泄漏点下游管道流量。线性化后可表示为

$$q_{l,u} - q_{l,d} = q_l \quad (13)$$

$$\text{其中 } q_{l,u} = \frac{\Delta Q_{l,u}}{Q_r} \quad q_{l,d} = \frac{\Delta Q_{l,d}}{Q_r}$$

将式(11)代入式(13)得

$$q_{l,u} - q_{l,d} = \tau h_l \quad (14)$$

因为

$$h_l = h_{l,u} = h_{l,d} \quad (15)$$

所以式(14)和式(15)可用节点的点矩阵方程描述:

$$X_{i+1} = A_i X_i \quad (16)$$

其中

$$X_{i+1} = \begin{bmatrix} q_{l,d} \\ h_{l,d} \end{bmatrix} \quad A_i = \begin{bmatrix} 1 & -\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad X_i = \begin{bmatrix} q_{l,u} \\ h_{l,u} \end{bmatrix}$$

式中 A_i 为泄漏点矩阵。

1.4 泄漏点与管道进出口边界条件频域函数关系

如图 2 所示管道系统,有 3 个节点①、②、③,分别代表管道进口、泄漏点、管道出口。根据对管道场矩阵方程和泄漏点矩阵方程的定义,图 2 所示系统进出口边界条件的关系为

$$X_D = A_3 X_d = A_3 (A_2 X_u) = A_2 A_3 (A_1 X_U) = A_1 A_2 A_3 X_U = A X_U \quad (17)$$

$$\text{其中 } X_D = \begin{bmatrix} q_D \\ h_D \end{bmatrix}$$

$$A = A_1 A_2 A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cosh \gamma_1 l_1 & \frac{j\omega T_{l,1}^2}{T_{w,1} \gamma_1} \sinh \gamma_1 l_1 \\ -\frac{T_{w,1} \gamma_1}{j\omega T_{l,1}^2} \sinh \gamma_1 l_1 & -\cosh \gamma_1 l_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cosh \gamma_3 l_3 & \frac{j\omega T_{l3}^2}{T_{w3} \gamma_3} \sinh \gamma_3 l_3 \\ -\frac{T_{w3} \gamma_3}{j\omega T_{l3}^2} \sinh \gamma_3 l_3 & -\cosh \gamma_3 l_3 \end{bmatrix}$$

$$X_U = \begin{bmatrix} q_U \\ h_U \end{bmatrix}$$

式中:下标 U 表示管道进口断面;u 表示泄漏点上游断面;d 表示泄漏点下游断面;D 表示管道出口断面;下标 1~3 表示管道编号,其中泄漏点被视为管道 2。

式(17)即为泄漏点与管道进出口边界条件的函数关系式,其中系数 τ 是初始泄漏流量 Q_{l0} 和泄漏位置 l 的函数。从式(17)可得一个定律:串连管道总的场矩阵等于串连管道场矩阵的积。对图 2 系统,若以管道进口作为计算距离的零点,泄漏位置 $l = l_1$,若式(3)中特征长度 L 取管长,则有 $l_1 + l_3 = 1$ 。

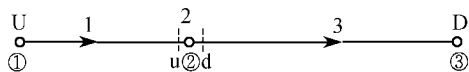


图 2 泄漏检测原理示意图

2 管道泄漏检测的优化方法

观察泄漏点与管道进出口边界条件的函数关系式(17)可知,当管道进出口边界条件各提供一个已知量,在给定初始泄漏流量和泄漏位置条件下,即已知 τ 和 l ,则可以求解出管道进出口的未知边界条件。换句话说,未知边界条件的频域特性是 τ 和 l 的函数。

在已知管道两端边界条件的情况下,管道任意点安装泄漏检测传感器位置的理论压力 h 或者流量 q 可以利用式(6)解出,它们也只是 τ 和 l 的频域函数,即 $h(\omega, \tau, l)$ 或者 $q(\omega, \tau, l)$ 是复数。

一个物理量的频域特性可以用幅频特性和相频特性描述,例如物理量是水压,其频域特性

$$h(\omega, \tau, l) = a_k(\omega, \tau, l) + j b_k(\omega, \tau, l) \quad (18)$$

式中: $a_k(\omega, \tau, l)$ 为 $h(\omega, \tau, l)$ 的实部; $b_k(\omega, \tau, l)$ 为 $h(\omega, \tau, l)$ 的虚部。则其幅频特性为

$$B(\omega, \tau, l) = \sqrt{a_k^2(\omega, \tau, l) + b_k^2(\omega, \tau, l)} \quad (19)$$

相频特性为

$$\varphi(\omega, \tau, l) = \arctan \left[\frac{b_k(\omega, \tau, l)}{a_k(\omega, \tau, l)} \right] \quad (20)$$

在频域泄漏检测过程中,说一个点是泄漏点,是指在给定的泄漏位置和初始泄漏流量条件下,同一

位置同名物理量(水压或流量)的理论计算频域特性与实测频域特性完全相同,或者最接近。因此,泄漏检测过程可以转化为参数的优化过程,其目标函数可以是

$$I = \int_0^{\omega_{\max}} \sum_{i \leq k} \{ c_{1,i} [B_i(\omega, \tau, l) - B_{m,i}(\omega)]^2 + c_{2,i} [\varphi_i(\omega, \tau, l) - \varphi_{m,i}(\omega)]^2 \} d\omega \quad (21)$$

式中: I 为目标函数; τ 和 l 为优化决策变量,是未知量;系数 $c_{1,i}$ 和 $c_{2,i}$ 为加权系数,均大于或等于零;下标 m 表示传感器实测量。当已知管道进出口各一个边界条件,则必然存在一个最优决策变量 τ_0 和 l_0 使目标函数 I 取最小值,这个 l_0 就是理论上的泄漏位置,根据 l_0 和 τ_0 可得初始泄漏流量。

由于上述管道泄漏检测过程全部在频域中完成,称为管道泄漏检测的全频域法。下面以一个算例检验该方法的可行性。

3 算例分析

如图 2 所示的简单系统,上游为水库,下游接阀门控制流量。管道长度为 1000 m,瞬变靠末端阀门的小开度快速线性关闭产生,关闭时间 0.1 s,波速 1000 m/s,管道直径 0.2 m,稳态初始流量 2.0 L/s,雷诺数为 11160,达西沿程阻力系数为 0.0302。其他参数详见文献[7]。

图 3 为用特征线方法计算得到的管道有无泄漏时末端阀门处的时域压力波形,其中泄漏点的位置坐标为 $l = 0.75$,即距上游水库 750 m,泄漏量为稳态流量的 10%。

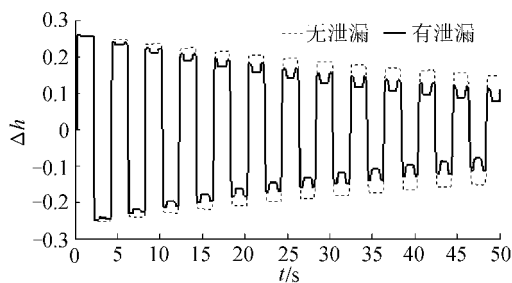


图 3 有无泄漏管道阀门处时域波形对比

应用式(9)可将图 3 时域特性变换为如图 4 所示的幅频特性,并将此结果作为泄漏检测的比较信号(相当于实测信号)。同时,图 4 和表 1 也给出了此情况下全频域法用遗传优化方法辨识的结果,图中 ω_0 为无量纲频率比, $\omega_0 = \omega / \omega_{th}$, $\omega_{th} = \pi a / (2L)$ 为管道理论固有频率。目标函数式(21)中仅选取幅频特性进行比较,即取 $c_{1,i} = 1$ 而 $c_{2,i} = 0$ 。遗传算法计算参数为:初始种群规模为 30,交叉概率 $p_c = 0.9$,

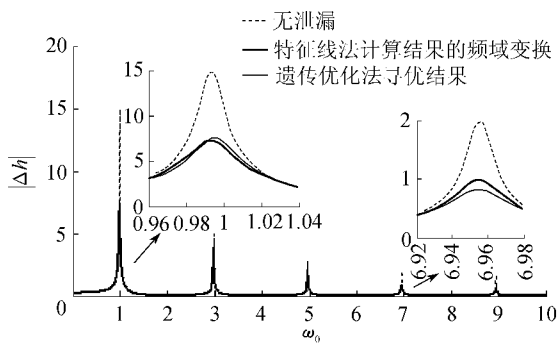


图4 全频域法辨识结果与特征线计算结果对比

表1 泄漏检测全频域法遗传算法辨识结果

进化代数/ 代	泄漏点距上游 水库距离/m	泄漏量/ 10^{-4}m^3	适应度
1	0.835 11	1.816 1	-0.002 892 7
10	0.753 30	2.135 4	-0.001 756 1
100	0.751 49	2.172 8	-0.001 752 0

变异概率 $p_m = 0.05$, 泄漏相对位置 l 的范围为 $0 < l < 1$, 泄漏量的范围 $0 < Q_{l0} < 0.3Q_0$ 。由表1可看出, 种群经过100代的进化后, 辨识的泄漏位置和泄漏流量分别为751.5 m和0.21 L/s, 二者的寻优精度良好, 数值模拟少许偏差主要是受瞬间关闭时非恒定摩阻的影响。

4 结 论

本文分析了现有管道泄漏检测频域法的特点及其存在的问题, 建立了适合各种边界条件的管道水

击频域数学模型, 并应用拉氏变换原理导出了实测离散函数的频域数学模型。在此基础上, 提出完全在频域中检测管道泄漏的新方法, 称之为管道泄漏检测的全频域法。采用全频域法, 可以将管道泄漏检测过程转化为参数的优化过程, 用遗传优化方法辨识管道泄漏点和泄漏流量。最后, 通过数字算例检验了管道泄漏检测全频域法的可行性。

参考文献:

- [1] MPESHA W, GASSMAN S L, CHAUDHRY M H. Leak detection in pipes by frequency response method[J]. Hydr Engrg, 2001, 127(2): 124-147.
- [2] 毛汉领, 黄文, 包家福, 等. 自来水管网泄漏检测方法的研究[J]. 噪声与振动控制, 2004(4): 20-23.
- [3] 杨开林, 郭宗周, 宋朝晖. 热力管网瞬变泄漏检测数学模型研究[J]. 水利学报, 1996(5): 50-56.
- [4] 王通, 阎祥安, 李伟华. 基于谐波分析的输油管道泄漏检测机理研究[J]. 化工自动化及仪表, 2005, 33(1): 51-54.
- [5] WANG Xiao-jian, LAMBERT M F, SIMPSON A R, et al. Leak detection in pipelines using the damping of fluid transient[J]. J Hydr Engrg, 2002, 128(7): 697-711.
- [6] LEE P J, VITKOVSKÝ J P, LAMBERT M F, et al. Frequency domain analysis for detecting pipeline leak[J]. J Hydr Engrg, 2005, 131(7): 596-604.
- [7] KIM S H. Extensive development of leak detection algorithm by impulse response method[J]. J Hydr Engrg, 2005, 131(3): 201-208.

(收稿日期 2007-07-31 编辑 骆超)

(上接第32页)

- [4] 黄耀英, 沈振中, 吴中如. Marc 软件在分析渗流场和渗流力中的应用[J]. 河海大学学报: 自然科学版, 2006, 34(5): 509-512.
- [5] 郑颖人, 赵尚毅, 张鲁渝. 用有限元强度折减法进行边坡稳定分析[J]. 中国工程科学, 2002, 4(10): 57-61.
- [6] 李咏偕, 施泽华. 塑性力学[M]. 北京: 水利电力出版社, 1987: 108-111.
- [7] 徐干成, 郑颖人. 岩土工程中屈服准则应用的研究[J]. 岩土工程学报, 1990, 12(2): 93-99.
- [8] 赵尚毅, 郑颖人, 刘明维, 等. 基于 Drucker-Prager 准则的边坡安全系数定义及其转换[J]. 岩石力学与工程学报, 2006, 25(S1): 2730-2734.
- [9] 赵尚毅, 郑颖人, 时卫民, 等. 用有限元强度折减法求边坡稳定安全系数[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(3): 333-336.
- [10] 张培文, 陈祖煜. 糯扎渡大坝设计边坡稳定的有限元分析[J]. 中国水利水电科学研究院学报, 2003, 1(3): 207-210.
- [11] 栾茂田, 武亚军, 年廷凯. 强度折减有限元法中边坡失稳的塑性区判据及其应用[J]. 防灾减灾工程学报,

2003, 23(3): 1-8.

- [12] 陈火红, 尹伟奇, 薛小香. MSC. Marc 二次开发指南[M]. 北京: 科学出版社, 2004: 288-289.
- [13] 朱军, 刘光廷. 改进的单元渗透矩阵调整法求解无压渗流场[J]. 水利学报, 2001(8): 49-52.
- [14] 陈火红. Marc 有限元实例分析教程[M]. 北京: 机械工业出版社, 2002: 158-166.
- [15] GB 50287—99 水利水电工程地质勘察规范[S].

(收稿日期 2007-09-28 编辑 骆超)

