

DOI:10.3880/j.issn.1006-7647.2008.03.018

理性有限元在多层层合板中的应用

朱炳麒, 陈学宏, 韦彪

(河海大学机电工程学院, 江苏常州 213022)

摘要: 为了进一步完善多层层合板有限元计算的理论与方法, 将理性有限元思想引入到多层层合板的计算中。采用多层层合板问题的基本解逼近单元内部场, 改善了有限元数值解在材料交界面上的连续性。算例数值计算结果表明, 理性有限元计算能在多层层合板的材料交界面上较大程度地满足位移和应力的连续性条件。

关键词: 理性有限元; 多层层合板; 位移元法; 正交各向异性

中图分类号: TU311.4 **文献标识码:** B **文章编号:** 1006-7647(2008)03-0073-03

Application of rational finite element method in multi-layered composite plates//ZHU Bing-qi, CHEN Xue-hong, WEI Biao (College of Mechanical and Electrical Engineering, Hohai University, Changzhou 213022, China)

Abstract: In order to develop the finite element method, the rational finite element idea is introduced into the calculation of multi-layered composite plates. The basic solutions to the problem of multi-layered composite plates are used to approximate the internal fields of elements, improving the continuity of the numerical solution at the interface of different materials. An example numerical calculation shows that the rational finite element method is practical and reasonable.

Key words: rational finite element; multi-layered composite plates; displacement element method; orthotropy

层合材料以其强度质量比和刚度质量比高的优点被广泛应用于国民经济的各个行业中。由于在构造上的复杂性和特殊性, 层合板历来是有限元计算理论和方法的研究重点。位移元由于采用单类变量求解, 很难满足不同材料在交界面上的位移和应力的连续条件, 杂交或混合杂交元虽然能够克服位移元的不足, 但其公式要比位移元复杂得多, 而且还要面临如何解决剪切锁死等问题。

位移元在有限元分析中应用最为广泛, 对其的理论研究也最为成熟^[1-2]。鉴于此, 笔者应用位移元探讨多层层合板的有限元求解。为了克服位移元在满足材料交界面上的位移和应力连续条件时所遇到的困难, 引入理性有限元思想^[3], 采用多层层合板问题的基本解来逼近单元内部场, 使位移元能够在材料交界面上满足或近似满足位移和应力的连续条件。

1 公式推导

以图 1 所示的 n 层层合板为例, 进行相关公式的推导。为了使推导更具有一般性, 假定该层合板每层均为正交各向异性材料, 第 i ($i = 1, 2, \dots, n$) 层上的应力-应变关系可表示为^[4-5]

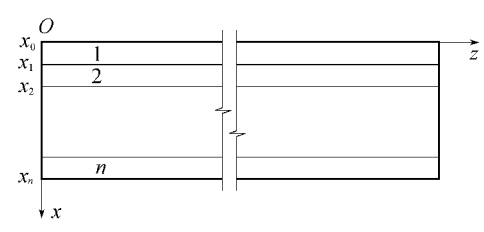


图 1 n 层层合板

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{x,i} \\ \epsilon_{z,i} \\ \gamma_{xz,i} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s_{1i} & s_{2i} & 0 \\ s_{2i} & s_{4i} & 0 \\ 0 & 0 & s_{6i} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{x,i} \\ \sigma_{z,i} \\ \tau_{xz,i} \end{pmatrix} \quad (1)$$

将式(1)记为 $\epsilon_i = C_i \sigma_i$ 。

材料交界面上的位移和应力的连续条件可表示为

$$\begin{aligned} u_i(x_i) &= u_{i+1}(x_i) & w_i(x_i) &= w_{i+1}(x_i) \\ \sigma_{x,i}(x_i) &= \sigma_{x,i+1}(x_i) & \tau_{xz,i}(x_i) &= \tau_{xz,i+1}(x_i) \end{aligned} \quad (2)$$

在推导相关公式时, 整体思想与文献[3]中的基本相同, 但为使求解结果能更好地符合层合板的特点, 不以各向同性平面问题的解作为基本解, 而以层合板问题的解作为基本解, 以此来逼近单元内部的位移场和应力场。若以四结点四边形单元为例, 则

作者简介: 朱炳麒(1962—)男, 江苏江阴人, 副教授, 从事工程力学的教学与研究。E-mail: zhubq@hhu.edu.cn

同样需要 2×4 个基本解。当四边形板单元分别发生 8 种位移或变形时,对应的位移和应力的基本解^{4-5]}如表 1 所示。表 1 中 $u_{si}^{(2)}$, d_1 , d_2 , r_i 的具体含义可以参阅文献 4-5]

表 1 多层层合板的基本解

板单元的 位移或变形	u_i	w_i	$\sigma_{x,i}$	$\sigma_{z,i}$	$\tau_{xz,i}$
x 向平移	1	0	0	0	0
z 向平移	0	1	0	0	0
刚性旋转	z	$d_2 - x$	0	0	0
x 向拉伸	x	$(s_{2i}/s_{1i})z$	$1/s_{1i}$	0	0
z 向拉伸	$(s_{2i}/s_{4i})x + r_i + d_1$	z	0	$1/s_{4i}$	0
纯剪切	$z/2$	$x/2$	0	0	$1/s_{6i}$
x 向纯弯	$-xz$	$-(s_{2i}/s_{1i})z + x^2/2$	z/s_{1i}	0	0
z 向纯弯	$u_{si}^{(2)} + z^2/2$	$z(d_2 - x)$	0	$(d_2 - x)/s_{4i}$	0

与文献 3]的推导相类似,将表 1 中 8 种位移或变形下的基本解叠加便可得到各材料层上的位移场和应力场,即

$$\begin{aligned} u_i &= a_1 + 0 + a_3 z + a_4 x + a_5 [(s_{2i}/s_{4i})x + r_i + d_1] + \\ &\quad a_6 (z/2) + a_7 (-xz) + a_8 (u_{si}^{(2)} + z^2/2) \\ \sigma_{x,i} &= 0 + 0 + 0 + a_4 (1/s_{1i}) + 0 + 0 + a_7 (z/s_{1i}) + 0 \\ &\quad \dots\dots \end{aligned} \tag{3}$$

因此单元变形能

$$U_i^e = \iint_e \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_i^T \boldsymbol{C}_i \boldsymbol{\sigma}_i dx dy = \frac{1}{2} \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{R}_a \boldsymbol{a} \tag{4}$$

式中 $\boldsymbol{a} = \{a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6 \ a_7 \ a_8\}^T$ 为单元广义位移; $\boldsymbol{R}_a$ 为对应于 $\boldsymbol{a}$ 的单元刚度阵。将单元结点坐标代入式(4)中,就可以得到 $\boldsymbol{a}$ 与结点位移 $\boldsymbol{d}$ 的关系,即

$$\boldsymbol{d} = \{u_1 \ w_1 \ u_2 \ w_2 \ u_3 \ w_3 \ u_4 \ w_4\}^T = \boldsymbol{T} \boldsymbol{a} \tag{5}$$

式中矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的具体内容可参阅文献 3]。显然,由式(4)和式(5)可按下式计算单元刚度阵:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{T}^T \boldsymbol{R}_a \boldsymbol{T}^{-1} \tag{6}$$

式中 $\boldsymbol{R}$ 为单元刚度阵。在得到单元刚度阵后,就可以组集总刚度矩阵,计算出结点位移,然后将结点位移代入式(5)中计算 $\boldsymbol{a}$,最后由式(3)计算出应力。

在应用上述方法求解层合板的位移和应力时必须注意以下几点:

a. 由于假定每一个具体单元都由单一材料构成,

表 2 层合板在均布荷载作用下材料交界面上的切应力和沿 x 方向的正应力

z/m	文献 3 方法				本文方法				解析法	
	τ_U/MPa	τ_L/MPa	σ_U/MPa	σ_L/MPa	τ_U/MPa	τ_L/MPa	σ_U/MPa	σ_L/MPa	τ^*/MPa	σ^*/MPa
0.4	8.0675	12.6930	-0.7691	-0.4446	9.4475	9.8605	-0.7687	-0.4441	9.5207	-0.6446
0.7	6.5537	10.3140	-0.7707	-0.4463	7.6744	8.0123	-0.7706	-0.4462	7.7355	-0.6446
1.0	5.0413	7.9339	-0.7707	-0.4463	5.9034	6.1633	-0.7706	-0.4462	5.9504	-0.6446
1.3	3.5289	5.5537	-0.7707	-0.4463	4.1324	4.3143	-0.7706	-0.4463	4.1653	-0.6446
1.6	2.0165	3.1736	-0.7707	-0.4462	2.3613	2.4653	-0.7705	-0.4462	2.3802	-0.6446
1.9	0.5489	0.7726	-0.8083	-0.4919	0.6406	0.6016	-0.8065	-0.4897	0.5950	-0.6446

注: τ_U , τ_L 和 σ_U , σ_L 分别表示层合板上层、下层在交界面处的切应力和正应力, τ^* 和 σ^* 分别为采用解析法计算所得交界面处的切应力和正应力。

因此在进行单元划分时单元不能跨越材料交界面。

b. 基本解中的参数,如 r_i , $u_{si}^{(2)}$, d_1 等,以及材料常数 s_{1i} , s_{2i} , s_{4i} , s_{6i} 都与材料所在层有关,因此为了满足材料在交界面上的位移和应力的连续条件,在应用式(6)计算单元刚度阵之前,必须首先计算出这些参数在该层的具体数值,相关的计算公式可参考文献 4-5]

c. 对于矩形或平行四边形单元,不做任何改动就能保证解收敛^{3]}。对于任意四边形单元,则需要对式(5)中的矩阵 $\boldsymbol{T}$ 做相应的修正后才能保证解收敛^{6-7]}。

2 算 例

由 2 种材料组成的层合板,左端固定、右端自由,如图 2 所示。板的材料常数 $s_{11} = s_{41} = 4.762 \times 10^{-2} \text{MPa}^{-1}$, $s_{21} = -1.429 \times 10^{-2} \text{MPa}^{-1}$, $s_{61} = 1.238 \times 10^{-2} \text{MPa}^{-1}$, $s_{12} = s_{42} = 7.937 \times 10^{-3} \text{MPa}^{-1}$, $s_{22} = -2.381 \times 10^{-3} \text{MPa}^{-1}$, $s_{62} = 2.064 \times 10^{-3} \text{MPa}^{-1}$ 。在单元划分完全相同, $F = 0.2 \text{kN}$, $q = 1 \text{MPa}$ 的条件下,分别用本文方法和文献 3]方法计算层合板在均布荷载 q 单独作用下材料交界面上 x 方向的正应力、切应力和在剪力 F 单独作用下材料交界面上的切应力。计算结果如表 2、表 3 所示,为便于比较,两表中还列出了采用文献 4]解析法计算的结果。

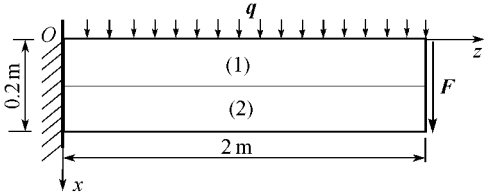


图 2 层合板所荷载作用

表 3 层合板在剪力作用下材料交界面上的切应力

z/m	文献 3 方法		本文方法		解析法
	τ_U/MPa	τ_L/MPa	τ_U/MPa	τ_L/MPa	τ^*/MPa
0.1	0.8860	1.6398	1.0415	1.2719	1.1901
0.4	1.0084	1.5867	1.1809	1.2326	1.1901
0.7	1.0083	1.5867	1.1807	1.2327	1.1901
1.0	1.0083	1.5867	1.1807	1.2327	1.1901
1.3	1.0083	1.5867	1.1807	1.2327	1.1901
1.6	1.0083	1.5867	1.1808	1.2326	1.1901
1.9	0.9794	1.6455	1.1492	1.2781	1.1901
2.0	1.1058	1.4505	1.2908	1.1273	1.1901

从表 2、表 3 中可以看出,本文方法所求出的切应力和正应力在材料交界面两侧的差明显小于文献 [3] 中的结果,说明在处理多层层合板问题上本文方法比文献 [3] 方法更优越,但本文方法所求的切应力及正应力在材料交界面上下层并不完全相等,还不能精确满足式(2)。这是由于在位移元中,结点的应力是通过所在单元的结点位移间接计算的,同一个结点在不同的单元中所计算出的应力必然存在一定的数值误差,随着网格的不断细分,这种误差将趋向零。

3 结 语

笔者从位移元形函数的构造方法上入手,将理性有限元思想引入到多层层合板问题中,使位移元能够在一定程度上满足层状结构材料在交界面上的位移和应力连续条件。虽然文中讨论的层合板的每

一层均假定为正交各向异性材料,但将其推广到一般的各向异性材料并不困难。

参考文献:

[1] 王勖成.有限单元法[M].北京:清华大学出版社,2003.
[2] 卓家寿.弹性力学中的有限单元法[M].北京:水利电力出版社,1990.
[3] 钟万勰,纪峥.理性有限元[J].计算结构力学及其应用,1996,13(1):1-8.
[4] 钟万勰,姚伟岸.多层层合板圣维南问题的解析解[J].力学学报,1997,29(5):617-626.
[5] 姚伟岸,钟万勰.辛弹性力学[M].北京:高等教育出版社,2002:119-131.
[6] 钟万勰,纪峥.平面理性有限元的收敛性证明[J].力学学报,1997,29(6):1-10.
[7] 钟万勰.有限元的收敛性与分片实验条件[J].计算力学学报,1997,14(3):1-12.

(收稿日期 2007-12-04 编辑 骆超)

(上接第 39 页)

为 Q_u 时,变截面桩的桩侧摩阻力进一步增大,整个桩长范围内桩侧摩阻力基本上表现为强化效应,而第 3 层土层表现为强烈的软化效应,其 R_c 为 0.54,第 4 层土层表现为强烈的强化效应,其 R_c 为 1.99,究其原因是:变截面处(位于第 3 层土层)的端阻作用限制了变截面上部桩土间的相对位移,使得变截面附近的桩侧摩阻力得不到正常发挥,又因为在外荷载作用下变截面处土体受到向下挤压的作用,形成一个局部压缩密实区,提高了土体物理力学性质,增大了土中的法向应力,从而使得第 4 层土层的桩侧摩阻力得到加强。因此,在变截面下部表现为强烈的强化效应,等截面桩桩顶以下 2/3 范围内土层的桩侧摩阻力大部分表现为强化效应, R_c 最大为 1.58~2.02,桩底以上 1/3 范围内的土层表现为微软化效应, R_c 为 0.57~0.87。

3 结 语

- a. 变截面桩的受力机理不同于等截面桩,变传统桩端阻力为桩侧阻力。这种桩型充分利用地基中不同深度的土层承载能力,有效地提高了单桩的单位体积极限承载力,并达到了减少沉降量的目的。
- b. 根据本文计算结果,等截面桩与变截面桩 2 种桩型桩底以上 1/3 范围内桩侧摩阻力的强化、软化效应在估算单桩极限承载力时可忽略不计,而桩顶以下 2/3 范围内的强化和软化现象非常显著,

估算时应加以考虑。

参考文献:

[1] 郭允庄.钻孔变截面桩成孔技术研究[J].工程勘察,1999(5):23-25.
[2] 张剑锋,鲁智明.钻孔灌注桩桩型与承载力的关系[J].上海地质,1999(4):1-4.
[3] 金建明,陈武,王仕方.钻孔灌注桩桩底后注浆效果分析[J].工业建筑,2002,32(7):39-42.
[4] 汤斌,陈晓平.群桩效应有限元分析[J].岩土力学,2005,26(2):299-302.
[5] 黄生根,张晓炜,曹辉.后压浆钻孔灌注桩的荷载传递机理研究[J].岩土力学,2004,25(2):251-254.
[6] 王陶,马晔.超长钻孔桩竖向承载性状的试验研究[J].岩土力学,2005,26(7):1053-1057.
[7] 崔廬,闫澍旺,周宏杰.多桩型复合地基的荷载传递机理研究[J].岩土力学,2005,26(2):290-294.
[8] 成立芹.一种变截面桩的对比试验研究[J].河北建筑工程学报,2004,22(1):11-15.
[9] 万林海,郭鹏,吴伟功.变截面挤扩桩承载特性的数值模拟[J].山西建筑,2005,31(17):1-2.
[10] 蒋红星,冯芳.超深钻孔灌注桩荷载传递性状[J].煤田地质与勘探,2003,31(1):43-46.
[11] 律文田,王永和,冷伍明,等.预制静压桩静动载现场试验分析[J].岩土力学,2005,26(2):251-255.
[12] 钟闻华,石名磊,刘松玉.超长桩荷载传递性状研究[J].岩土力学,2005,26(2):307-310.

(收稿日期 2007-05-25 编辑 骆超)