

DOI :10.3880/j.issn.1006-7647.2009.01.002

饱和-非饱和非稳定渗流有限元分析方法的改进

周桂云^{1,2}

(1. 金陵科技学院建筑工程学院, 江苏 南京 211169; 2. 中国人民解放军理工大学工程兵工程学院, 江苏 南京 210007)

摘要 :对饱和-非饱和非稳定渗流分析的有限元计算方法加以改进,提出饱和度对渗透压力偏导数的修正公式,消除了饱和-非饱和非稳定渗流计算中存在的数值弥散现象和参数拟合不收敛现象,使迭代收敛速度提高了 3 倍。同时也消除了有限元迭代求解过程中的振荡现象。经实例证明,本文方法是有效可行的。

关键词 :饱和-非饱和渗流;非稳定渗流;数值弥散;加速收敛;有限元法

中图分类号 :TV139.14 文献标识码 :A 文章编号 :1006-7647(2009)01-0005-03

Improvement of finite element analysis of unstable saturated-unsaturated seepage//Zhou Gui-yun^{1,2}(1. Institute of Civil Engineering and Architecture of Jinling Institute of Technology, Nanjing 211169, China; 2. Engineering Institute of PLA University of Science and Technology, Nanjing 210007, China)

Abstract :In order to improve the finite element analysis of saturated and unsaturated seepage, a formula for revising the differential coefficient between saturation and pore pressure is put forward in this paper, which can be used to avoid the numerical dispersion in parameter fitting during the calculation of unstable saturated and unsaturated seepage so as to raise the convergence speed. Meanwhile, the oscillating phenomenon of the finite element iterative solution is eliminated. The results obtained from the examples show that the method is effective and feasible.

Key words :saturated-unsaturated seepage; unsteady seepage; numerical dispersion; acceleration convergence; FEM

孔隙介质像土壤、裂隙岩石、沙层、松散岩石等,一般都由固相和它们之间的孔隙组成,孔隙一般由空气和水来填充。地面降雨下渗、农田灌溉排水和库水位变化时土坝渗流等都属于孔隙介质渗流,一般为饱和-非饱和非稳定渗流。前人在这方面已经做了许多有意义的工作^[1-6],但是数值弥散与参数拟合不收敛的现象仍然值得研究。笔者根据水体的连续性方程和动量方程,推导了饱和-非饱和非稳定渗流的整体平衡方程,对求解过程中的数值弥散与参数拟合不收敛现象进行改进,提出饱和度对渗透压力偏导数的修正公式,有效消除了有限元迭代求解过程中的振荡现象。算例说明本文方法是有效可行的。

1 饱和-非饱和非稳定渗流有限元模型

多孔介质饱和-非饱和土体中,水体的广义达西定律即动量平衡方程为^[7]

$$k_{wd}\dot{w} = -\nabla p \tag{1}$$

式中: k_{wd} 为动力渗透矩阵, $k_{wd} = k_w(\rho g)$,其中 k_w

为静力渗透矩阵; $\dot{w}$ 为水流速; p 为渗透压力。
水流的连续性方程:

$$-\nabla^T \dot{w} = n \frac{S_w}{K_w} \dot{p} + C_s \dot{p} \tag{2}$$

式中: $-\nabla^T \dot{w}$ 为水流流入量(取单位体积水体);
 n 为孔隙率; $n \frac{S_w}{K_w} \dot{p}$ 为水体的体积压缩应变,其中
 S_w 为饱和度, K_w 为水体体积模量; $C_s = n \frac{\partial S_w}{\partial p}$ 为湿度, $C_s \dot{p} = n \frac{\partial S_w}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} = n \frac{\partial S_w}{\partial t}$ 为饱和度变化引起的水量改变,可以由 $S_w \sim p$ 关系曲线得到。

将式(1)两边左乘 $-\nabla^T k_w$,得到

$$-\nabla^T \dot{w} = \nabla^T (k_w \nabla p) \tag{3}$$

将式(2)和式(3)合并,并记 $\frac{1}{Q^*} = n \frac{S_w}{K_w} + C_s$,得到饱和-非饱和非稳定渗流的平衡微分方程:

$$\nabla^T (k_w \nabla p) = \frac{1}{Q^*} \dot{p} \tag{4}$$

多孔介质饱和-非饱和非稳定渗流的定解条件由初

始条件和边界条件构成。

初始条件：

$$p(x,y,z,0)=p_0(x,y,z,0) \tag{5}$$

边界条件通常有两类：

第一类边界条件,即已知水压力边界 Γ_{pw} ：

$$p\Big|_{\Gamma_{pw}}=\bar{p}\Big|_{\Gamma_{pw}} \quad t>0 \tag{6}$$

式中 $\bar{p}$ 为边界 Γ 上的渗透压力。

第二类边界条件,即已知水头边界 Γ_w ：

$$\dot{w}\Big|_{\Gamma_w}=\dot{\bar{w}}\Big|_{\Gamma_w} \text{ 或 } k_w(-\nabla p)\Big|_{\Gamma_w}=\dot{\bar{w}}\Big|_{\Gamma_w} \quad t>0 \tag{7}$$

式中 $\dot{\bar{w}}$ 为边界 Γ_w 上的水流速。

应用伽辽金加权余量法,并假定渗透压力近似值的选择使得边界条件式(6)自动满足,即所谓的强制边界条件,可以得到方程(4)的等效积分形式：

$$\int_{\Omega} W^T\left[\nabla(k_w\nabla p)+\frac{1}{Q^*}\dot{p}\right]d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}^T\left[(-k_w\nabla p-\dot{w})^T\vec{n}\right]d\Gamma=0 \tag{8}$$

式中： $\vec{n}$ 表示单位质量； W 和 $\bar{W}$ 分别是区域 Ω 中及边界 Γ 上的任意权函数,对式(8)左端第1项用Green公式进行分部积分,并选择权函数使得 $W\Big|_{\Gamma_{pw}}=0$, $\bar{W}\Big|_{\Gamma_w}=-W_{\Gamma_w}$,则等效积分式(8)变为如下表示形式：

$$\int_{\Omega}\left[\nabla W^T(k_w\nabla p)+W^T\frac{1}{Q^*}\dot{p}\right]d\Omega + \int_{\Gamma_w} W^T\dot{\bar{w}}^T\vec{n}d\Gamma=0 \tag{9}$$

根据有限元离散思想,将具有无限自由度的连续介质离散为有限单元的组合物体,每个单元内任一点的渗透压力 p^e 可由单元节点值与插值函数(形函数)表示为

$$p^e=\sum_{j=1}^m N_{pj}^e\bar{p}_j^e=N_p^e\bar{p}^e \tag{10}$$

式中： m 为每个单元的节点数； $N_p^e=[N_1^eI_3,\dots,N_m^eI_3]$ 为渗透压力 p 的形函数， I_3 为 3×3 的单位矩阵， $\bar{p}^e$ 为单元渗透压力矢量， $\bar{p}_j^e$ 为节点 j 的渗透压力。整个区域所有单元的总和可以写成总体权函数的形式：

$$p=N\bar{p} \tag{11}$$

将式(11)代入式(10),并选择形函数作为积分方程的权函数,得

$$\int_{\Omega}(\nabla N)^T k_w \nabla N \bar{p} d\Omega + \int_{\Omega} N^T \frac{1}{Q^*} N \dot{\bar{p}} d\Omega +$$

$$\int_{\Gamma_w} N^T \dot{\bar{w}}^T \vec{n} d\Gamma = 0 \tag{12}$$

经整理可得饱和-非饱和非稳定渗流的有限元空间离散方程：

$$H\dot{p}+S\dot{p}=f_p \tag{13}$$

式中： H 为渗透矩阵， $H=\int_{\Omega}(\nabla N)^T k_w \nabla N d\Omega$ ； S 为压缩矩阵， $S=\int_{\Omega} N^T \frac{1}{Q^*} N d\Omega$ ； f_p 为流体力向量， $f_p=\int_{\Gamma_w} N^T \dot{\bar{w}}^T \vec{n} d\Gamma$ 。

式(13)中含有渗透压力对时间的一阶导数,由于 k_w 是 S_w 的函数, S_w 是负压 p_c 的函数,所以式(13)中 H 和 S 均随时间而变化,即为饱和-非饱和非稳定渗流方程。因此需要对方程进行时间离散后才能将其转化为代数方程进行求解。这里采用广义Newmark- β 法进行时间域的数值积分,即所谓的GNpj法,其中 p 代表未知量展开为多项式的阶数, j 代表微分方程的阶数。选择GN11对 p 进行离散,第 $n+1$ 时刻的有限元方程为

$$H_{n+1}p_{n+1}+S_{n+1}\dot{p}_{n+1}=f_{p,n+1} \tag{14}$$

预测步：

$$p_{n+1}^p=p_n+\Delta t\dot{p}_n \tag{15}$$

校正步：

$$p_{n+1}=p_{n+1}^p+\theta\Delta t\Delta\dot{p}_n \tag{16}$$

$$\dot{p}_{n+1}=\dot{p}_n+\Delta\dot{p}_n \tag{17}$$

将式(15)~(17)代入式(14)中并整理得

$$\bar{K}_{p,n+1}\Delta\dot{p}=\bar{f}_{p,n+1} \tag{18}$$

式中： $\bar{K}_{p,n+1}$ 为系数矩阵， $\bar{K}_{p,n+1}=\theta\Delta tH_{n+1}+S_{n+1}$ ； $\bar{f}_{p,n+1}$ 为第 $n+1$ 时刻的流体力， $\bar{f}_{p,n+1}=f_{p,n+1}-(H_{n+1}p_{n+1}^p+S_{n+1}\dot{p}_n)$

2 有限元计算中的改进

对饱和-非饱和非稳定渗流来说,其 k_w 和 S_w 均是渗透压力的函数,需要根据压力水头确定单元的 k_w 及 S_w 对渗透压力的偏导数 $\frac{\partial S_w}{\partial p}$,进而修正 H 和 S 。

在实际工程中 $k_w\sim p$ 和 $S_w\sim p$ 关系曲线是根据试验得到的有限个离散点数据,它们之间的函数关系可以由离散点线性插值得到。例如,若当前 p 的值介于离散点 p_i 和 p_{i+1} 之间时,渗透系数可以表达为： $k_w(p^*)=k_d k_r(p^*)$,其中动力渗透系数 k_d 为固有材料特性,不随压力水头值变化, $k_r(p^*)$ 为相对渗透系数,可以由离散点数据线性插值得到：

$$k_r(p^*)=k_r(p_i)+\frac{p^*-p_i}{p_{i+1}-p_i}[k_r(p_{i+1})-k_r(p_i)] \tag{19}$$

若采用同样方法求解 $\frac{\partial S_w}{\partial p}$,则 $\frac{\partial S_w}{\partial p}$ 会呈现梯状^[8-10],在迭代求解过程中将产生振荡,造成迭代过程较慢或迭代不收敛,即数值弥散现象。笔者将文献 8 的方法加以改进,采用如下公式对 $\frac{\partial S_w}{\partial p}$ 进行修正:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial S_w}{\partial p} &= \frac{S_w(p_{n+1}) - S_w(p_n)}{p_{n+1} - p_n} && p_{n+1} < 0, p_n < 0 \\ \frac{\partial S_w}{\partial p} &= \frac{S_w(p_n) - 1}{p_n} && p_{n+1} \geq 0, p_n < 0 \\ \frac{\partial S_w}{\partial p} &= \frac{S_w(p_{n+1}) - 1}{p_{n+1}} && p_{n+1} < 0, p_n \geq 0 \\ \frac{\partial S_w}{\partial p} &= 0 && p_{n+1} \geq 0, p_n \geq 0 \end{aligned}\right. \quad (20)$$

式中 p_{n+1} 为第 $n+1$ 时刻的压力水头; p_n 为第 n 时刻的压力水头。计算表明上述方法可以有效消除计算中的数值弥散现象。

3 算例分析

为了验证本文方法的正确性,用 2 个算例进行渗流分析。

算例 1 用文献 3 和文献 9 中介绍的沙槽试验模型,长 315 cm,宽 23 cm,高 33 cm,模型材料为均匀砂,孔隙率 $n=0.44$,饱和渗透系数 $k_w'=0.33$ cm/s,储水率 $S_s=0$ 。非饱和砂土的饱和度、负压、相对渗透系数关系如表 1 所示。初始条件采用上下游水位均为 10 m 的平衡态,当 $t>0$ s 后,上游水位骤升至 30 cm,计算区域划分为四边形单元,单元总数为 3 465,结点总数为 3 604,最大迭代次数为 3 次,比文献 9 中加速后的最大迭代次数 12 次小得多。计算成果与试验结果如图 1 所示,由图 1 可知计算成果与试验结果很接近,由此可见文中提出的有限元改进算法很有效,同时也验证了程序的正确性。

表 1 砂土的土水特征值

饱和度	负压/kPa	相对渗透系数
1.00	0	1.00
0.82	0.325	0.97
0.64	0.65	0.94
0.50	0.91	0.20
0.45	1.0	0.13
0.18	10.0	0.01

算例 2 分析文献[11]中介绍的均质土坡,土体参数: $\rho=2.0\times10^3$ kg/m³, $c=1.0\times10^4$ Pa, $\varphi=20^\circ$, $k_w'=3.4\times10^{-6}$ m/s, $n=0.44$,非饱和土体的饱和度、负压、相对渗透系数关系见表 2,几何参数如图 2 所示,共剖分 2 009 个结点,1 920 个四边形单元,网格剖分如图 3 所示。

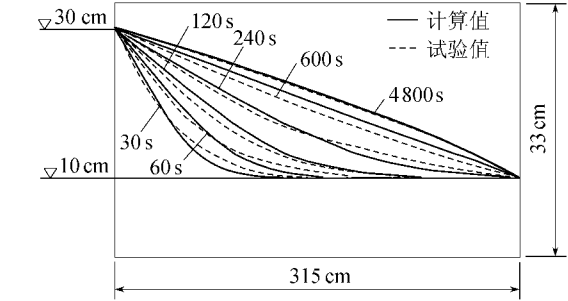


图 1 自由面数值解与沙槽模型试验结果比较
表 2 均质土坡的土水特征值

饱和度	负压/kPa	相对渗透系数
1	0	1
0.989 2	21.19	9.80×10^{-1}
0.976 3	31.00	9.10×10^{-1}
0.939 6	39.44	4.80×10^{-1}
0.631 5	4.87	1.00×10^{-1}
0.528 0	51.31	6.00×10^{-2}
0.379 3	61.12	1.00×10^{-2}
0.286 6	72.89	2.00×10^{-3}
0.212 5	92.02	2.00×10^{-4}
0.177 6	115.07	2.00×10^{-5}
0.154 7	138.12	3.00×10^{-6}

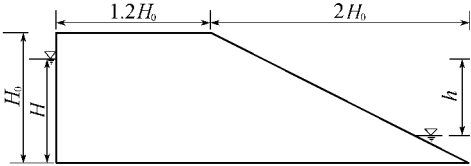


图 2 均质土坡模型尺寸

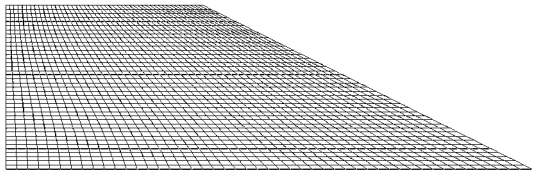


图 3 均质土坡网格剖分

a. 水位骤降工况自由面变化情况:初始条件采用上下游水位均为 H 的平衡态,下游水位骤降至 $h=0.25H$,上游水位不变,坡体内自由面的变化过程如图 4 所示。

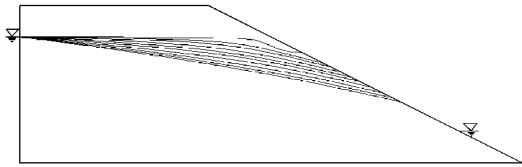


图 4 水位骤降时坡体内浸润线变化过程

b. 水位骤升工况自由面变化情况:初始条件采用上下游水位均为 $h=0.25H$ 的平衡态,上游水位骤升至 H ,下游水位不变,坡体内自由面的变化过程如图 5 所示。

(下转第 11 页)

越多。而 GA-BP 算法可以搜索到全局最优解,例如该算例比较结果中,拟合误差最小时,预测精度并不高,而采用反演方法计算的结果,虽然拟合误差不是最小,但预测精度却很高。

4 结 语

通过引入 GA-BP 算法来反演 LS-SVM 的 2 个重要参数,理论分析和仿真试验表明了这种方法的有效性,可以优化选择支持向量机参数,从而获得较好的模型结果,有效解决了人为选择支持向量机参数的随机性和盲目性,提高了预测的精度。

由于 LS-SVM 具有良好外推能力,不必知道太多的数据即可建模,而且在学习样本数量很多时又不易陷入“维数灾难”,能保证解收敛于全局最优,预测结果更接近于真实值,故可有效地根据土石坝原型观测资料分析大坝中存在的渗流问题。

参考文献:

[1] VAPNIK V N. The nature of statistical learning theory[M]. NY: Springer-Verlag, 1995.
[2] 武晓, 宗蓓华. 基于支持向量机回归的港口吞吐量非线性

性组合预测[J]. 河海大学学报:自然科学版, 2005, 33(4): 482-484.
[3] 王涛, 刘兴年, 黄尔. 基于 SVM 方法的小流域泥石流输沙量预测[J]. 水利水电科技进展, 2008, 28(2): 1-3.
[4] SUYKENS J A K, VANDEWALLE J. Least squares support vector machine classifier[J]. Neural Processing Letter, 1999, 9(3): 293-300.
[5] 赵洪波. 基于遗传算法的进化支持向量机研究[J]. 绍兴文理学院学报, 2004, 24(9): 25-27.
[6] 宋志宇, 李俊杰. 最小二乘支持向量机在大坝变形预测中的应用[J]. 水电能源科学, 2006, 24(6): 49-52.
[7] 余志雄, 周创兵, 李俊平, 等. 基于 V-SVR 算法的边坡稳定性预测[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(14): 2468-2475.
[8] 郭辉, 刘贺平, 王玲. 最小二乘支持向量机参数选择方法及其应用研究[J]. 系统仿真学报, 2006, 18(7): 2033-2036.
[9] 刘开云, 乔春生, 滕文彦. 边坡位移非线性时间序列采用支持向量机算法的智能建模与预测研究[J]. 岩土工程学报, 2004, 26(1): 57-61.
[10] TIKHONOV A N. Solutions of ill-posed problems[M]. New York: John Wiley & Sons, 1977: 47-87.

(收稿日期: 2008-08-07 编辑: 方宇彤)

(上接第 7 页)

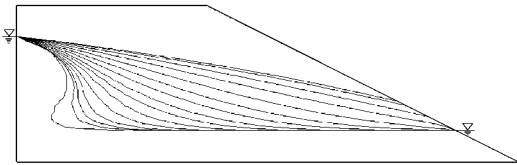


图 5 水位骤升时坡体内浸润线变化过程

在求解过程中每步计算最多迭代 3 次, 有限元计算就满足误差收敛条件 $\epsilon \leq 10^{-12}$, 计算收敛速度快。由图 4、图 5 可知, 2 种工况的初期坡体内的孔隙负压较大, 且初期自由面变化较快, 随时间增长变化速度逐渐减小, 直到趋于稳定, 计算结果符合工程实际规律。

4 结 语

推导了饱和-非饱和非稳定渗流的整体平衡方程, 对迭代求解过程中的数值弥散现象与参数拟合不收敛现象, 提出了一种改进方法。从算例可以看出, 文中所提的方法有效消除了有限元求解过程中的振荡现象, 并加快了迭代收敛速度, 可以推广到实际工程中进行应用。

参考文献:

[1] 毛昶熙. 渗流计算分析与控制[M]. 北京: 水利水电出版

社, 1990.
[2] 吴梦喜. 饱和-非饱和土体非稳定渗流数值分析[J]. 水利学报, 1999(12): 38-42.
[3] 高骥, 雷光耀, 张锁春. 坝坝饱和-非饱和渗流的数值分析[J]. 岩土工程学报, 1988, 10(6): 28-37.
[4] 杨代泉, 沈珠江. 非饱和土一维广义固结的数值计算[J]. 水利水运科学研究, 1991(4): 357-385.
[5] 岑建, 詹美礼. 水工渗流有限元网格剖分的控制断面节点对连法[J]. 水利水电科技进展, 2006, 26(5): 48-50.
[6] 朱伟, 秦建设, 高玉峰. 求解非饱和土堤初始浸润线的一种解析法[J]. 河海大学学报:自然科学版, 2003, 31(3): 314-317.
[7] 刘晓青. 土体-孔隙体静动相互作用有限元解法的研究[D]. 南京: 河海大学, 1997.
[8] 鲁子林. 水库群调度网络分析法[J]. 华东水利学院学报, 1983, 11(2): 35-48.
[9] 彭华, 陈胜宏. 饱和-非饱和岩土非稳定渗流有限元分析研究[J]. 水动力学研究与进展, 2002, 17(2): 253-259.
[10] 彭华, 陈胜宏. 饱和非饱和非稳定渗流有限元加速技术[J]. 武汉大学学报:工学版, 2001, 34(3): 9-12.
[11] LANE P A, GRIFFITHS D V. Assessment of stability of slopes under drawdown conditions[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 2000, 126(5): 443-450.

(收稿日期: 2008-07-22 编辑: 方宇彤)