

计算二维浅水方程中静水压力项与底坡项的积分平衡法

于守兵^{1 2}

(1. 南京水利科学研究院,江苏 南京 210024; 2. 河海大学水文水资源与水利工程科学国家重点实验室,江苏 南京 210098)

摘要 :考虑静水压力项随水深的非线性变化 ,推导出计算二维浅水方程中静水压力项和底坡项的积分平衡法 ,以消除静水条件下的虚假流动。采用三角形网格的有限体积法模拟浅水流动 ,在以斜底模型逼近实际地形和控制体内变量线性分布的条件下 ,准确积分得出沿控制体界面的静水压力项和控制体上底坡项的表达式 ,从理论上证明了在静水条件下两者能够达到平衡。过丘恒定流算例计算结果表明 ,该算法能够使水流保持静水状态 ,不产生虚假流动。

关键词 浅水方程 ;三角形网格 ;有限体积法 ;底坡项 ;静水压力项

中图分类号 :TV131.1 **文献标识码** :A **文章编号** :1006-7647(2009)04-0032-04

Integral balance method for computing stationary hydraulic pressure term and bed slope term in two-dimensional shallow water equations//YU Shou-bing^{1 2} (1. Nanjing Hydraulic Research Institute ,Nanjing 210024 , China ;2. State Key Laboratory of Hydrology-Water Resources and Hydraulic Engineering ,Nanjing 210098 , China)

Abstract :The integral balancing method has been developed in to compute the hydraulic pressure terms and bed slope terms in two-dimensional shallow water equations , with consideration of the fact that the hydraulic pressure term changes non-linearly with water depth , so as to eliminate artificial flow under hydrostatic conditions . As the finite volume method(FVM)based on a triangle mesh is applied to simulate shallow flowing water , with a slope model being used to simulate natural topography and with the assumption that the variance is linearly distributed in the control volume , expressions of the two terms are integrated. The balance between the two terms under hydrostatic conditions is theoretically proven . An example of steady flow over the hump demonstrates that the velocity error computed under hydrostatic conditions is within the scope of acceptance and no artificial flow occurs .

Key words :shallow water equations ; triangle mesh ; finite volume method ; bed slope term ; stationary hydraulic pressure term

实际工程中遇到的很多流动问题都可以用浅水方程^[1]描述 ,如河口、湖泊、近海流动等。近 30 年来 ,在计算空气动力学领域广泛应用的各种高性能格式被逐渐移植到浅水流动的模拟中来^[2]。为适应复杂的几何边界和保持计算域上变量的积分守恒性 ,通常采用基于无结构的三角形或四边形网格的有限体积法进行模拟。对于主要由重力驱动的浅水流动 ,地形处理成为模拟成败的关键因素^[3]。反映在计算中通常出现静水条件下的虚假流动。针对该问题 ,许多学者提出阶梯流水力单元模型^[4]、准平衡态的波动传播算法^[5]、水面坡降法^[6]、数值平衡法^[7]和静水压力修正法^[8]等。笔者针对基于三角形网格的有限体积法 ,定义控制体与网格重合 ,采用网格中心式布置变量并将变量插值到节点 ,在控制体内线性重构变量时 ,提出计算静水压力项与底坡项的积分平衡法。

1 虚假流动的产生

虚假流动产生的原因在于采用有限体积法离散方程时 ,为将方程写成守恒形式 ,把水位梯度项分成静水压力项和底坡项 ,以 x 方向为例 :

$$gh \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} gh^2 \right) + gh \frac{\partial z_b}{\partial x} \tag{1}$$

式中 : h 为总水深 ; ζ 为水位 ; z_b 为底床高度。

为较好地逼近天然地形和方便地处理底坡 ,通常采用斜底模型。对于三角形网格 ,3 个节点确定 1 个平面 ,其方程可表示为

$$z_b = ax + by + z_0 \tag{2}$$

式中 z_0 为原点处高程 ,则底坡可以很容易地求得 :

$$\begin{cases} S_{bx} = - \frac{\partial z_b}{\partial x} = - a \\ S_{by} = - \frac{\partial z_b}{\partial y} = - b \end{cases} \tag{3}$$

作者简介 :于守兵(1980—) ,男 ,河南许昌人 ,博士研究生 ,从事河口海岸及近海工程研究。E-mail :yushoubing@163.com

式中： S_{bx} 、 S_{by} 分别为 x 和 y 方向上的底坡； a 、 b 为系数。

在静水条件下，静水压力梯度项和底坡项在控制体内往往不能严格抵消，这样两者的平衡被打破，产生虚假流动。为消除虚假流动，学者们提出多种处理办法。主要分为2类：一类是改变单元水力模型，消去底坡项；另一类是对底坡项加以改造，使底坡项与压力项在静水条件下能够平衡。

2 已有的解决方法

谭维炎等^[4]、Zhao等^[9]用局部平底模型代替阶梯模型，将界面上的跌水问题转化为平底渠道上的瞬时溃坝问题，以消去底坡项。计算时采用单元平移法，用界面一侧的水深代替两侧不同水深，计算误差较大。由于平底模型无法逼近复杂的水下地形，且阶梯状的控制体边界给通量计算带来困难，目前多倾向于采用斜底模型概化实际地形。

Leveque^[5]提出准平衡态的波动传播算法（quasi-steady wave-propagation algorithm），基本思想是在每个时间步长开始时，在每个控制体中心引入新的间断。引入的间断保证变量在控制体内的平均值没有改变，且其求解产生的波动能够消除控制体中底坡项的影响。波动传播算法能够很好地计算接近平衡态的微小扰动问题，然而对于远离平衡态的源项问题，例如含有激波的明渠临界流不是很适合。此外，该算法在三角形网格上较难实现。

Zhou等^[6]提出水面坡降法（surface gradient method），选择水位作为重构变量，在控制体内采用分片线性重构，重构后的控制体中心水深等于控制体上水深的积分平均值。对底坡项采用简单的中心离散，则在静水条件下控制体中数值通量项与底坡项严格相等。Zhou等的算法对于三角形网格上的底坡项离散有一定困难。

Rogers等^[7]提出通量项和底坡项的数值平衡法，用水位和静水深代替总水深，即

$$gh \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} g (\zeta^2 + 2 \zeta h_s) \right] - g \zeta S_{bx} \quad (4)$$

式中 h_s 为相对于假定基面的静水深。这样，流动的产生是由水位的变化驱动，具有明确的物理意义。Rogers等的方法没有考虑静水压力项的非线性分布，通量项和底坡项的误差仍存在，只是在水位为零时通量项与底坡项都为零，故不产生虚假流动。

潘存鸿等^[10]和王志力等^[11]分别提出以压力项代替底坡项和将底坡项按特征方向分解的算法。

3 三角形网格有限体积法

3.1 二维浅水方程

以向量形式表示的浅水方程为

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \mathbf{S} \quad (5)$$

$$\text{其中} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + gh^2/2 \\ huv \end{pmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + gh^2/2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ ghS_{bx} - ghS_{fx} \\ ghS_{by} - ghS_{fy} \end{pmatrix}$$

式中： u 和 v 分别为 x 和 y 方向的流速； S_{fx} 、 S_{fy} 分别为 x 和 y 方向上的摩擦项。

3.2 有限体积法离散

采用网格中心式布置变量，控制体与网格重合布置。网格节点变量的值由该节点所在控制体形心处的变量值按距离的倒数加权得到。

在任意控制体 Ω 中对方程(5)积分，应用格林公式，得

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} dl = \iint_{\Omega} \mathbf{S} d\Omega \quad (6)$$

式中： $\mathbf{n}$ 为控制体边界 $\partial\Omega$ 的单位外法向向量； $d\Omega$ 和 dl 分别为面积分和线积分的微元； $\mathbf{F}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n}$ 为控制体边界外法向方向上的通量，记为 $F_n(\mathbf{U})$ 。

时间积分采用显式向前格式，则对控制体 i ，FVM离散方程为

$$U_i^{k+1} = U_i^k + \Delta t \left(-\frac{1}{A_i} \sum_{j=1}^3 F_{n_j} l_j + \bar{S} \right) \quad (7)$$

式中： A_i 为控制体 i 的面积； F_{n_j} 为沿第 j 边外法向方向上的通量； l_j 为边界的长度； $\bar{S}$ 为源项的某种平均。

4 积分平衡法

4.1 静水压力项与底坡项积分公式推导

Komaef^[8]曾在水位为常数情况下推导出静水压力项与底坡项满足静水条件的表达式。事实上只要水深在控制体内线性分布，就能够通过积分求得静水压力项的准确表达式，下面予以推导。

为计算沿控制体界面的静水压力项，沿控制体的某条边建立局部坐标系（图1），起点处水深为 h_0 ，终点处水深为 h_1 。为计算控制体内底坡项，建立局部坐标系（图2），控制体3个节点坐标分别为

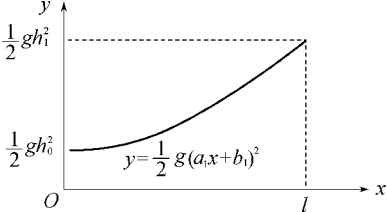


图1 静水压力项沿控制体界面分布示意图

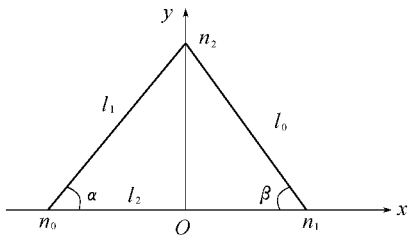


图2 底坡项在控制体上积分示意图

$n_0(x_0, 0)$, $n_1(x_1, 0)$ 和 $n_2(0, y_2)$ 控制体节点处水深分别为 h_0, h_1, h_2 。

参考有限元法三角形线性元的解析积分公式可得到静水压力项沿界面积分表达式为

$$\int_0^l \frac{1}{2} g h^2 dx = \frac{1}{2} g \int_0^l (a_1 x + b_1) dx = \frac{1}{6} g l (h_0^2 + h_0 h_1 + h_1^2) \quad (8)$$

式中: a_1, b_1 为水深沿控制体界面线性重构系数; l 为边长。

底坡项在控制体上积分表达式为

$$\iint_{\Omega} g h S_{bx} dx dy = \iint_{\Omega} g (a_2 x + b_2 y + c) S_{bx} dx dy = \frac{1}{3} g A (h_0 + h_1 + h_2) S_{bx} \quad (9)$$

$$\iint_{\Omega} g h S_{by} dx dy = \iint_{\Omega} g (a_2 x + b_2 y + c) S_{by} dx dy = \frac{1}{3} g A (h_0 + h_1 + h_2) S_{by} \quad (10)$$

式中: a_2, b_2, c 为水深在控制体内线性重构系数; A 为控制体面积, $A = (x_1 - x_0)y_2/2$ 。

4.2 静水条件下的平衡证明

设节点 n_0, n_1, n_2 所对应的各边边长分别为 l_0, l_1 (见图2), 以 n_0 为顶点的内角为 α , 以 n_1 为顶点的内角为 β 。在静水条件下, x 和 y 方向的底坡分别为: $S_{bx} = a_2, S_{by} = b_2$ 。则静水压力项与底坡项在 x 方向的和为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} g l_1 (h_0^2 + h_0 h_2 + h_2^2) \sin \alpha - \\ & \frac{1}{6} g l_0 (h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2) \sin \beta + \\ & \frac{1}{3} g A (h_0 + h_1 + h_2) S_{bx} = \\ & \frac{1}{6} g (h_0^2 + h_0 h_2 + h_2^2) y_2 - \\ & \frac{1}{6} g (h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2) y_2 + \\ & \frac{1}{6} g (x_1 - x_0) y_2 (h_0 + h_1 + h_2) a_2 = \\ & \frac{1}{6} g y_2 [h_0^2 + h_0 h_2 - h_1 h_2 - h_1^2 + \\ & a_2 (x_1 - x_0) (h_0 + h_1 + h_2)] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} g y_2 (h_0 + h_1 + h_2) (h_0 - h_1 - a_2 x_0 + a_2 x_1) = \\ & \frac{1}{6} g y_2 (h_0 + h_1 + h_2) [(h_0 - a_2 x_0 - c) - \\ & (h_1 - a_2 x_1 - c)] = 0 \end{aligned}$$

静水压力项与底坡项在 y 方向的和为

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{6} g l_1 (h_0^2 + h_0 h_2 + h_2^2) \cos \alpha - \\ & \frac{1}{6} g l_0 (h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2) \cos \beta + \\ & \frac{1}{6} g l_2 (h_0^2 + h_0 h_1 + h_1^2) + \\ & \frac{1}{3} g A (h_0 + h_1 + h_2) S_{by} = \\ & \frac{1}{6} g (h_0^2 + h_0 h_2 + h_2^2) x_0 - \\ & \frac{1}{6} g (h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2) x_1 + \\ & \frac{1}{6} g (h_0^2 + h_0 h_1 + h_1^2) (x_1 - x_0) + \\ & \frac{1}{6} g (x_1 - x_0) y_2 (h_0 + h_1 + h_2) b_2 = \\ & \frac{1}{6} g (h_0 + h_1 + h_2) [(x_0 - x_1) h_2 - x_0 h_1 + x_1 h_0] + \\ & \frac{1}{6} g (x_1 - x_0) y_2 (h_0 + h_1 + h_2) b_2 = \\ & \frac{1}{6} g (h_0 + h_1 + h_2) [(x_0 - x_1) (b_2 y_2 + c) - \\ & x_0 (a_2 x_1 + c) + x_1 (a_2 x_0 + c) + b_2 y_2 (x_1 - x_0)] = 0 \end{aligned}$$

采用式(8)、式(9)和式(10)计算静水压力项和底坡项时,在静水条件下两者严格相等,从而消除了虚假流动。从上述推导过程来看,积分平衡法是对采用线性重构时静水压力项和底坡项在控制体上的准确求解,在计算浅水流动时不存在误差,而且适合多种高性能计算格式。

5 过丘恒定流算例

设计长 20 m、宽 10 m 的水槽,水槽底部高程分布为 $z_b = \max\{0.2 - 0.05(x - 10)^2, 0\}$, 以 0.5 m 网格尺度进行网格剖分,共划分 1 850 个计算单元(图3)。水槽左边和右边分别为入流和出流开边界,上边和下边为闭边界。设置静水深 $h_s = 0.4 - z_b$, 初始水位、初始流速、入流和出流开边界处水位均为零。

该算例采用 Roe 格式求解界面通量,模型边界按文献[4]给出的方法处理。以时间步长 $\Delta t = 0.01$ s 计算至 20 000 个循环时,最大流速为 1.23×10^{-4} m/s,出现在图3所示的小三角形阴影单元。该控制体单元形心坐标为(8.25, 0.149),处于水槽平底部分和凸起部分的结合地带, x 和 y 方向的坡度分别为 -0.175 和 -7.03×10^{-3} 。

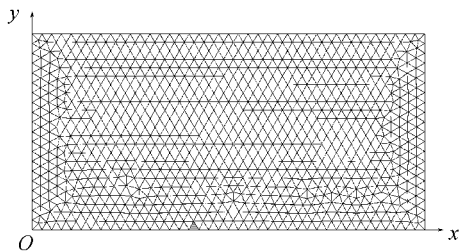


图3 矩形水槽三角形网格剖分

6 结 语

笔者讨论了采用有限体积法处理底坡项的常见算法,推导出三角形网格斜底模型守恒物理量线性重构时计算静水压力项和底坡项的积分平衡法。积分平衡法能够准确计算控制体界面处的静水压力项和控制体上底坡项的值,并且在静水条件下两者可以保持严格的平衡。过丘恒定流算例计算结果表明,该算法能够消除虚假流动,使水流保持静水状态。

参考文献:

[1] 谭维炎,胡四一.计算浅水动力学的新方向[J].水科学进展,1992,13(4):310-317.
 [2] 胡四一,谭维炎.一维非恒定明流计算的三种高性能差分格式[J].水科学进展,1991,12(1):11-21.
 [3] 谭维炎.浅水动力学的回顾和当代前沿问题[J].水科学进展,1999,19(3):296-303.

[4] 谭维炎,胡四一.浅水流动计算中一阶有限体积法 Osher 格式的实现[J].水科学进展,1994,14(4):262-270.
 [5] LEVEQUE R J. Balancing source terms and flux gradients in high-resolution godunov methods: the quasi-steady wave-propagation algorithm[J]. J Comput Phys, 1998, 146: 346-365.
 [6] ZHOU J G, CAUSON D M, MINGHAM C G, et al. The surface gradient method for the treatment of source terms in the shallow-water equations[J]. J of Comput Phys, 2001, 168: 1-25.
 [7] ROGERS B D, BORTHWICK A G L, TAYLOR P H. Mathematical balancing of flux gradient and source terms prior to using Roe's approximate riemann solver[J]. J Comput Phys, 2003, 192: 422-451.
 [8] KOMAEI S. An improved, robust implicit solution for the two-dimensional shallow water equations on unstructured grids [C]//BOUSMAR D, ZECH Y. Proc of 2nd Int Conf on Fluvial Hydraulics. Rotterdam [s.n.], 2004: 1065-1072.
 [9] ZHAO Di-hua, LAI J S, SHEN H W. A two-dimensional contaminant transport model with high resolution upwind schemes[C]//COTRONEO G V. Proc of ASCE 1994 Conf on Hydr Engrg Buffalo, New York: ASCE, 1994: 135-139.
 [10] 潘存鸿,徐昆.三角形网格下求解二维浅水方程的 KFVS 格式[J].水利学报,2006,37(7):858-864.
 [11] 王志力,耿艳芬,金生.具有复杂计算域和地形的二维浅水流动数值模拟[J].水利学报,2005,36(4):439-445.

(收稿日期:2008-07-28 编辑:骆超)

(上接第9页)-0.2 mm(绝对值,下同),且仅有2个残差超过1 mm,其余残差都小于1 mm。另外,残差的符号有正有负,表明残差具有随机性。该算例卡尔曼滤波法的拟合误差较小,采用卡尔曼滤波法预测2006年12月16日ZG88点水平位移变形值为648.9 mm,而ZG88点2006年12月16日水平位移变形监测值为650.6 mm,预测误差为1.7 mm,预测效果较好。

8 结 语

笔者讨论了树坪滑坡的基本特征及树坪滑坡的形成机制,介绍了树坪滑坡的监测系统及滑坡的变形特征。变形监测表明树坪滑坡的变形主要与滑坡体的地形地貌及土层结构有关,而大气降雨及三峡水库库水位的影响是导致树坪滑坡产生变形的外界因素,树坪滑坡上部变形小、下部变形大,表现为明显的牵引式滑坡变形特征。使用泰勒级数建立滑坡变形与时间的函数关系,并将泰勒级数的余项及时间变化的2次方及3次方的系数变化量看作数学期望为零的动态噪声,建立卡尔曼滤波模型,应用于树坪滑坡变形的预测预报。算例计算结果表明卡尔曼滤波模型的拟合效果和预测效果良好,可用于土质滑坡变形的短期预测预报。

参考文献:

[1] 张纘毅.基于灰色模型的滑坡变形预测[J].天津城市建设学院学报,2008,14(2):114-117.
 [2] 王祥,郑明新,张定邦.改进的灰色GM(1,1)模型在滑坡预测中的应用[J].华东交通大学学报,2008,25(4):11-14.
 [3] 尹晖,丁睿.时序预测和灰色预测用于链子崖危岩体定点变形预报的研究[J].中国地质灾害与防治学报,1996,7(增刊):49-55.
 [4] 陆付民,何薪基,任德记.AR(n)模型在滑坡变形分析中的应用[J].勘察科学技术,1996(6):53-54.
 [5] 王洪兴,唐辉明,陈聪.指数趋势模型在斜坡变形位移预测中的应用[J].岩土力学,2004,25(5):808-810.
 [6] 袁天鑫.最佳估计原理[M].北京:国防工业出版社,1979:45-67.
 [7] 崔希璋,於宗俦,陶本藻,等.广义测量平差[M].北京:测绘出版社,1992:123-156.
 [8] 贾沛璋.误差分析与数据处理[M].北京:国防工业出版社,1992:89-112.
 [9] 王正明,易东云.测量数据建模与参数估计[M].长沙:国防科技大学出版社,1997:84-98.
 [10] 陆付民.模型优化法在滑坡变形分析中的应用[J].勘察科学技术,2003,21(2):48-51.

(收稿日期:2008-09-05 编辑:骆超)