

水舌入水喷溅的随机数学模型

柳海涛 ,刘之平 ,孙双科

(中国水利水电科学研究院 ,北京 100038)

摘要 :对水舌入水喷溅的随机计算理论进行研究与改进 ,开发了随机数学模型。该模型对溅水区进行时空离散 ,可反映水舌入水形态与喷溅过程对溅水分布的影响。同时 ,通过引入人工神经网络模块 ,实时判别水滴的当地风速与飞行终止条件 ,使其具备模拟复杂地形与风场下溅水分布的能力。通过室内溅水试验对数学模型进行验证 ,结果表明该模型的模拟计算结果与试验结果较吻合。

关键词 :泄洪雾化 ;水舌入水形态 ;喷溅 ;随机模型 ;降雨强度分布 ;河谷地形 ;风场

中图分类号 :TV65 ;TV135 文献标识码 :A 文章编号 :1006-7647(2009)06-0001-04

Stochastic mathematical model of splashing from water jets//LIU Hai-tao , LIU Zhi-ping , SUN Shuang-ke(China Institute of Water Resources and Hydropower Research , Beijing 100038 , China)

Abstract :A stochastic mathematical model was developed based on research and improvement of the computation of splashing from water jets. The splash region disperses over time and space , reflecting the form of the water jets entry and the influence of the splashing process on rainfall distribution. Meanwhile , through the artificial neural network module , the numerical model can estimate real-time wind velocity and terminal flying conditions , making the model capable of simulating the rainfall distribution in complex topography and wind fields. The mathematical model is verified by laboratory model tests. The results show that the calculation agrees with the test results.

Key words :flood discharge atomization ; water jets entry ; splashing ; stochastic model ; rainfall distribution ; valley topography ; wind field

水电站工程的泄水建筑物在运行过程中引起的泄洪雾化 ,对下游建筑物的运行、边坡稳定、交通安全以及周围环境均会产生不利影响 ,如何评估与防范雾化危害 ,是工程设计中的重要研究课题之一。泄洪雾化的强度与规模主要取决于雾源量的大小 ,其中水舌入水喷溅占据主导地位 ,由此产生的溅水雾化构成了雾化降雨的主体。目前国内对于溅水雾化的数值模拟主要采用基于蒙特卡罗方法的随机溅水模型^[1-4] ,由于该类模型无法完整地反映水舌分布形态、喷溅过程 ,以及地形、风场等因素的影响 ,在一定程度上制约了其在工程实践中的应用。笔者针对上述问题进行研究与改进 ,在此基础上开发随机溅水数学模型 ,并结合室内溅水试验进行计算验证。

1 随机溅水数学模型

1.1 水滴空中运动的微分方程

水滴在运动过程中受到重力、浮力和空气阻力的共同作用 ,同时溅水区内存在水舌风场与自然风

场 ,水滴所受的空气阻力(或拖曳力)同风场与水滴间的相对速度有关。由牛顿第二定律可建立水滴运动的力学微分方程 :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u & \frac{dy}{dt} &= v & \frac{dz}{dt} &= w \\ \frac{du}{dt} &= -C_f \frac{3\rho_a}{4d\rho_w} u_d \sqrt{u_d^2 + v_d^2 + w_d^2} \\ \frac{dv}{dt} &= -C_f \frac{3\rho_a}{4d\rho_w} v_d \sqrt{u_d^2 + v_d^2 + w_d^2} \\ \frac{dw}{dt} &= -C_f \frac{3\rho_a}{4d\rho_w} w_d \sqrt{u_d^2 + v_d^2 + w_d^2} + \frac{\rho_a - \rho_w}{\rho_w} g \end{aligned}\right. \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} u_d &= u - u_f \\ v_d &= v - v_f \\ w_d &= w - w_f \end{aligned}$$

式中 : u , v , w 分别为水滴在 x , y , z 方向上的绝对运动速度 ; C_f 为阻力系数 ,一般可取 0.02 ~ 0.05 ; ρ_a ,

ρ_w 分别为空气和水的密度 ; u_d, v_d, w_d 分别为水滴在 x, y, z 方向上的相对运动速度 ; u_f, v_f, w_f 分别为水滴当地的风速。

方程 (1) 可采用 4 阶龙格-库塔法^[5]求解。

1.2 溅水出射随机假定

a. 水滴直径 d 满足伽马分布^[2-4] :

$$f(d) = \frac{1}{\lambda^\alpha \Gamma(\alpha)} d^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{d}{\lambda}\right) \quad (2)$$

式中 : α 为常数 ; $\lambda = k_1 \bar{d}$, $\bar{d}$ 为水滴粒径众值 , k_1 为常数。

b. 水滴初始抛射速度 u : 溅水试验观察表明 , 水滴出射速度与粒径之间存在一定的相关性。大粒径水滴所需的入射冲量较大 , 故出射速度较小 , 溅射范围相对较小 ; 粒径较小的水滴出射速度大 , 溅射范围广。因此 , 笔者认为粒径为 $\bar{d}$ 的水滴所对应的溅水出射速度 u_m 为一随机变量 , 且符合伽马分布 :

$$f(u_m) = \frac{1}{\lambda^\beta \Gamma(\beta)} u_m^{\beta-1} \exp\left(-\frac{u_m}{\lambda}\right)$$

其中 $\lambda = k_2 \bar{u}$ (3)

式中 : β, k_2 为常数 ; $\bar{u}$ 为喷射速度众值。

对于任意粒径 d 的水滴 , 其 u 值作如下修正 :

$$\frac{u}{u_m} = a \exp[b(\bar{d} - d)] \quad (4)$$

式中 : a, b 为经验系数。

c. 水滴出射角 θ 满足伽马分布 :

$$f(\tan \theta) = \frac{1}{\lambda'^\epsilon \Gamma(\epsilon)} (\tan \theta)^{\epsilon-1} \exp\left(-\frac{\tan \theta}{\lambda'}\right)$$

其中 $\lambda' = k_3 \tan \bar{\theta}$ (5)

式中 : ϵ 为常数 ; $\bar{\theta}$ 为出射角众值 ; k_3 为常数 , 其取值原则是使伽马分布函数的峰值同确定性描述中的众值相对应。

d. 水滴的水平偏转角 φ 满足正态分布 :

$$f(\tan \varphi) = \frac{1}{\tan \sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\tan \varphi - \tan \mu)^2}{2 \tan^2 \sigma}\right] \quad (6)$$

式中 : μ 为偏转角众值 ; σ 为偏转角的均方差。

2 溅水时均量的计算

2.1 溅水喷射速度与粒径的众值

刘士和等^[2]针对水滴与水面的碰撞过程建立了动量守恒方程与能量守恒方程 , 并导出了垂直碰撞与斜碰撞条件下的溅水出射速度与角度公式 ; 刘宣烈等^[6]对入射角为 $15^\circ \sim 60^\circ$ 、入射流速为 $37 \sim 59 \text{ m/s}$ 条件下的溅水现象进行物理模拟 , 得到了溅水出射速度与角度的众值表达式。计算分析表明 , 对于高速射流 (流速大于 37 m/s) 条件下的溅水抛射

速度 , 采用刘宣烈的公式计算较为合理 ; 在室内溅水试验中 , 水滴入水速度一般在 10 m/s 数量级 , 采用刘士和的公式模拟溅水分布形态更具合理性。

溅水水滴的 $\bar{d}$ 与其入水速度、角度、流量以及入水形态有关 , 一般取 $3 \sim 6 \text{ mm}$ 。

2.2 溅水的水滴颗粒流量

文献^[3]给出了点源喷射流量 q 的理论方法。在溅水计算中需要将 q 换算为水滴颗粒流量 n , $n = \frac{6q}{\pi \bar{d}_m^3}$, $\bar{d}_m$ 为水滴平均粒径。由于 $\bar{d}_m$ 未知 , 故暂以 $\bar{d}$ 代替。为保证溅水总量守恒 , 应先以众值颗粒流量 $\bar{n} = \frac{6q}{\pi \bar{d}^3}$ 作为初值 , 根据水滴粒径的伽马分布假定 , 随机生成 $\bar{n}$ 个水滴 , 然后计算其总水量 $\bar{q} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{\bar{n}} \pi \bar{d}_i^3$ 。由此可知 , 水滴颗粒流量 $n = \frac{q \bar{n}}{\bar{q}}$ 。

需要指出的是 , 在实际工程中由于采用各种扩散型挑坎 , 水舌入水形态复杂。在计算过程中需根据水舌入水形态将喷溅区域划分为多段线源的组合。各线源对应的入水速度、含水浓度、平面位置等时均量可由试验结果或掺气水舌运动数学模型^[7]求得。本文模型可根据水舌入射条件 , 自行求解各段线源的喷溅流量、速度、角度等的众值 , 每个线源上水滴的初始位置采用均匀分布假定。

3 随机模型的数值计算方法

3.1 喷射时间的离散

溅水出射水滴分布于整个空间 , 但只有当水滴到达地面时才能形成降水 , 若仅以地面高程作为终止条件 , 而忽略喷溅过程及水滴飞行时间的差异 , 则计算得到的降雨强度值偏大。为此 , 本文模型采用了如下离散方法 : ①根据水滴喷射速度众值与上下游落差 , 计算出水滴在空中的停留时间 t (溅水喷射历时 T 一般应满足 $T > 2t$) ; ②将计算时间离散为 m 个时间步长 Δt , 假设在 T 内总的喷射水滴量为 $N = T n$, 则每个步长内的水滴喷射量 $N_i = N/m$; ③运用 4 阶龙格-库塔法求解每个时间步长内的水滴喷射过程 , 对于第 i 个步长内出射的 N_i 个水滴 , 其最长飞行历时 $t_i = T(m-i)/m$ 。

3.2 喷溅空间的离散

降雨强度定义为一定时间内穿过单位面积平面的总水量除以降雨历时 , 故对于下垫面采取如下离散方法 :

a. 在溅水空间取一个地形曲面 (或平面) , 并离散为小尺度计算网格 , 每次溅水计算只考虑该表面上的含水量与降雨强度分布 , 对于不同高程的曲面需要另行计算。

b. 程序共进行 M 次喷射过程,每次喷射过程可分为 m 个时段。在每个时段内计算 N_i 个喷射水滴的飞行轨迹,同时判断每个水滴的位置,若其在 $n-1$ 时刻位于计算平面以上,而在 n 时刻位于该平面以下,则表明水滴已穿过该平面。此时,根据其平面坐标将其计入相应的平面网格,同时该水滴的飞行将终止。

c. 当所有 M 次喷射过程计算完成后,统计每个网格内穿过的水滴总体积,再除以喷溅历时 T 、网格水平投影面积与试验次数 M ,即可得到该平面上的时均降雨强度分布。

一般地, M 不应小于 100 次。

3.3 水滴运动过程中风速与地形的影响

以往随机溅水模型对于风场与地形的影响,主要采用概化函数的处理方法^[8],这在一定程度上降低了模型的实用性。本文模型通过引入人工神经网络计算模块^[9],实时判别水滴的当地风速与飞行终止条件。首先,通过对复杂地形与风场的学习,分别得到风场关系矩阵与地形关系矩阵。然后,在每个时间步长内运用上述矩阵与神经网络预报模块,求解水滴的当地风速及飞行高度。前者可直接代入水滴运动方程,后者用于水滴飞行终止的判别。上述 2 个判别过程采用 1 个通用计算模块,仅在输入输出变量上略有不同。其中,风速判别时输入矢量为水滴的空间位置 $[X, Y, Z]_N$,输出矢量为对应的风速 $[U, V, W]_N$;地形判别时,输入矢量为水滴的平面位置 $[X, Y]_N$,输出矢量为对应的地面高程 $[Z]_N$, N 为每个时间步长内的出射水滴数。

3.4 计算中的数值振荡问题

喷射水滴的粒径为一随机变量,由水滴运动微分方程可知水滴所受的空气阻力加速度与其直径成反比,当水滴直径小于某一粒径值时,水滴的运动速度会产生数值振荡。因此,在每个时间步长末需对水滴在三维方向上所受的阻力加速度进行判断,若其值在任一方向上发生逆转,表明水滴运动速度在该方向上已经达到稳态(阻力加速度为零),下一时间步长内该方向的运动分量应按初始加速度为零计算。

4 随机溅水模型计算实例

笔者结合双江口水电站洞式溢洪道 1:45 的水

工模型^[10]进行了室内溅水试验,并针对部分试验工况进行计算分析。水滴入射条件见表 1。喷射流量 q 、喷射速度众值 $\bar{u}$ 、喷射角度众值 $\bar{\theta}$ 和水平偏转角众值 $\bar{\varphi}$,由计算模型根据入射条件求得。

在工况 1 与工况 2 中,下垫面为一水平面,距水面约 40 cm,其上无地形阻挡;而在工况 3 中,下垫面为水面以上的自然地形,该工况用以验证溅水数学模型对复杂地形的适应能力。限于技术手段,溅水试验中未能获得完整的三维风场,故仅根据典型断面的实测风速,概化为高斯分布 $u(x, y) = F(x) \cdot \exp\left(-\frac{y^2}{\sigma^2}\right)$,其中 x 为纵向距离, y 为横向坐标, $F(x)$ 为中心线上的垂线平均风速(变化范围为 1 ~ 6 m/s), $\sigma = 0.56 m$ 。

数学模型计算网格尺寸为 10 cm,计算喷溅次数 $M = 100$ 次,计算时间 $T = 25 s$,计算步长 $\Delta t = 0.125 s$;喷射粒径的随机分布参数 $\alpha = 20$, $\lambda = 0.05 \bar{d}$,喷射速度的随机分布参数 $\beta = 4$, $\lambda = 0.25 \bar{u}$,喷射速度与喷射粒径的相关性特征参数 $a = 1$, $b = 140$,喷射角度的随机分布参数 $\epsilon = 2$, $\lambda = \tan \bar{\theta}$;水平偏移角均方差 $\sigma = 15^\circ$ 。

针对工况 1 中的出射条件,对溅水粒径与喷射速度的相关性进行研究。首先,假定溅水喷射速度与喷射粒径为互不相关的随机变量,称为假定 1;另一种是采用本文关于喷射速度与粒径的相关性假定,称为假定 2。图 1 为工况 1 条件下降雨强度分布的计算结果。其中,假定 1 条件下溅水分布较为平缓,雨区纵向范围约 15 m,降雨强度峰值为 80 mm/h;而采用假定 2 后,溅水分布较为陡峻,雨区纵向范围约 6 m,降雨强度峰值为 120 mm/h。对照相同条件下的溅水试验结果可知假定 2 更为合理。

图 2 为工况 1 与工况 2 条件下中心线上的降雨强度纵向分布。计算结果与试验结果吻合较好。研究表明,在无地形阻挡的条件下,水面附近的溅水纵向范围可达 6 m 以上。

图 3 为工况 3 条件下下垫面的降雨强度分布形态。计算结果表明,尽管入水流速与入水宽度有所增大,但由于对岸地形的阻挡,溅雨区纵向长度减小到 5 m 左右,溅水区的最大爬升高度约为 2 m。

表 1 数学模型计算工况

工况	出口流量/ ($m^3 \cdot s^{-1}$)	出口流速/ ($m \cdot s^{-1}$)	水舌落差/ m	水舌挑距/ cm	水舌宽度/ cm	入水流速/ ($m \cdot s^{-1}$)	入水角度/ ($^\circ$)	下垫面高程*/ cm
1	0.182	6.944	1.66	369 ~ 395	142	8.87	39.27	40
2	0.268	7.146	1.61	401 ~ 429	154	9.09	38.16	40
3	0.182	6.944	2.66	408 ~ 443	158	9.79	42.10	0 ~ 220

* 表示降雨强度测点(或计算点)相对于水面的高度。

5 结 语

a. 对水舌入水喷溅的随机出射假定、喷射时间与空间的离散方法、风场与地形的影响等进行探讨,对一些假定及方法进行改进,开发了随机数学模型。

b. 指出随机出射条件中的喷溅粒径与喷溅速度具有一定的相关性,并进行了试验验证。

c. 通过室内溅水试验对数学模型进行验证,结果表明该模型的模拟计算结果与试验结果的一致性良好。

d. 模型采用神经网络模块,实时判别水滴当地的风速与飞行终止条件,因此具备模拟复杂地形与风场条件下溅水雾化分布的能力。

参考文献:

- [1] 张华, 练继建, 刘嘉. 应用蒙特卡罗方法求解一类随机微分方程[J]. 天津大学学报, 2003, 36(4): 430-433.
- [2] 刘士和, 曲波. 泄洪雾化溅水区长度深化研究[J]. 武汉大学学报: 工学版, 2003, 36(5): 5-8.
- [3] 张华. 挑流水舌的水滴随机喷溅数学模型[J]. 水利学报, 2003, 34(8): 21-25.
- [4] 段红东, 刘士和, 罗秋实, 等. 雾化水流溅水区降雨强度分布探讨[J]. 武汉大学学报: 工学版, 2005, 38(5): 11-14.
- [5] 何光渝, 高永利. Visual Fortran 数值计算方法集[M]. 北京: 科学出版社, 2002.
- [6] 刘宣烈, 刘均. 龙滩水电站泄洪雾化的数学模型研究[R]. 天津: 天津大学水利水电工程系, 2002.
- [7] 柳海涛, 孙双科, 王晓松. 挑流水舌空中形态与含水浓度的数值解法[C]//唐洪武, 李桂芬, 王连祥. 水力学与水利信息学进展 2007: 第三届全国水力学与水利信息学大会论文集. 南京: 河海大学出版社, 2007: 511-516.
- [8] 练继建, 刘昉, 黄财元. 环境风和地形因素在挑流泄洪雾化数学模型中的影响[J]. 水利学报, 2005, 36(10): 1147-1152.
- [9] 柳海涛, 孙双科, 刘之平. 泄洪雾化预测的人工神经网络方法探讨[J]. 水利学报, 2005, 36(10): 1241-1245.
- [10] 柳海涛, 孙双科. 大渡河双江口洞式溢洪道水工模型试验及泄洪雾化影响分析[R]. 北京: 中国水利水电科学研究院, 2008.

(收稿日期 2009-04-30 编辑: 高建群)

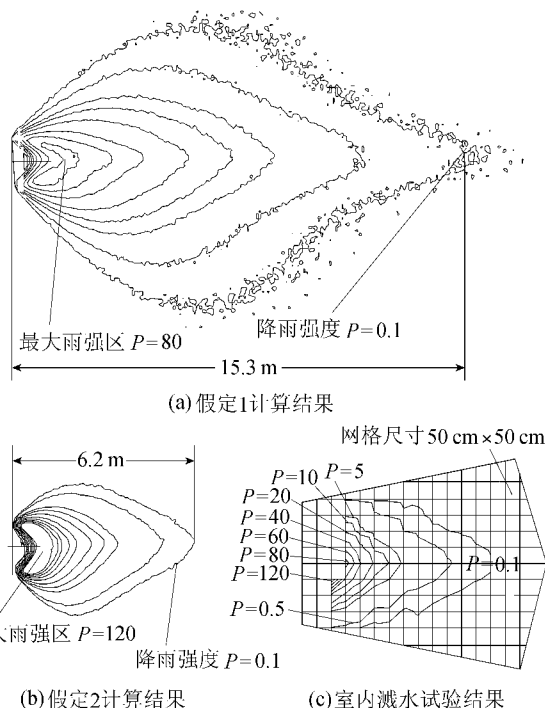
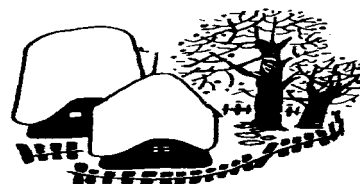
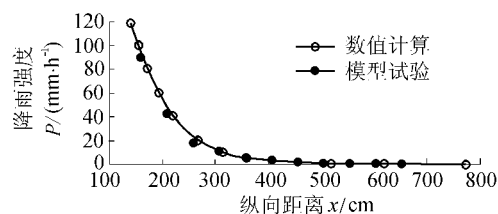
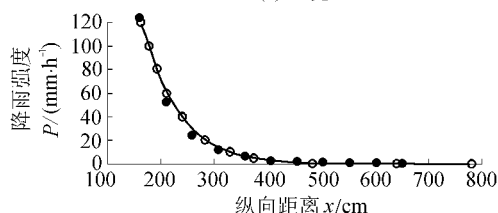


图1 工况1条件下溅水降雨强度分布(单位: mm/h)



(a) 工况1



(b) 工况2

图2 中心线上降雨强度纵向分布

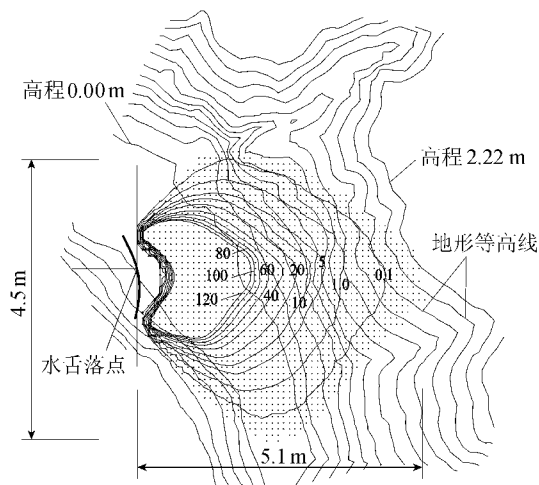


图3 自然河谷地形条件下地面降雨强度分布(单位: mm/h)