

土石坝(堤)等梯形分布荷载下地基附加应力普遍解答

王一博^{1 2}, 卢廷浩^{1 2}

(1. 岩土力学与堤坝工程教育部重点实验室, 江苏 南京 210098; 2. 河海大学岩土工程研究所, 江苏 南京 210098)

摘要 给出土石坝(堤)等梯形分布压力下地基中任一点 M 的竖向附加应力的普遍解答。将梯形分布压力分解为三角形分布或均匀分布压力, 可以有若干种分解方法, 再利用叠加原理进行叠加, 从而获得若干解答公式, 可以求得包括坝顶宽度范围以内和以外地基中任意一点的 3 个附加应力分量($\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$)。算例表明这些普遍解答方法方便实用, 满足了工程的需要, 不再有奥斯特伯格(Osterberg J O)公式的缺陷。

关键词 土石坝(堤); 梯形荷载; 地基; 附加应力; 普遍解答

中图分类号 :TU431 **文献标识码** :A **文章编号** :1006-764X(2009)S1-0051-04

土石坝、道路路堤、铁路路堤等底部可视为柔性基础, 基底压力按可按梯形分布考虑, 如图 1(a)所示。1957 年, 奥斯特伯(Osterberg J O)^[1]提出土坝(堤)下地基竖向附加应力的算法, 如图 1(b)所示, 在三角形分布荷载的作用下 M 点的竖向附加应力, 奥斯特伯格推出下面的计算公式:

$$\sigma_z = \frac{\theta}{\pi} p_t \tag{1}$$

式中: σ_z 为地基内一点的竖向附加应力; θ 为图 1 所示的角度(用弧度表示); p_t 为三角形分布荷载最大集度。

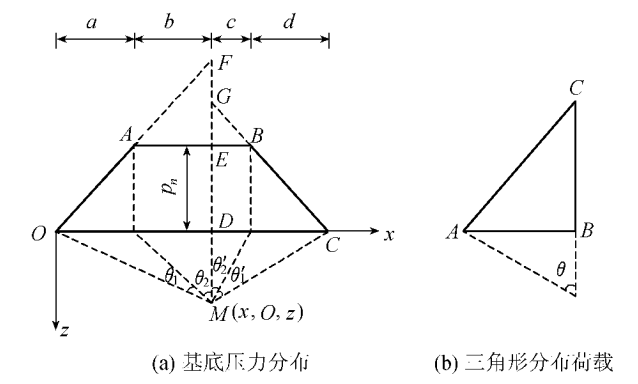


图 1 奥斯特伯格方法示意图

将基底梯形分布压力划分为左右 2 个部分 I, II(均为直角梯形), 如图 1(a)所示, 分别求出由 2 部分梯形分布压力对 M 点所引起的竖向附加应力, 再根据应力叠加原理, 将这 2 部分进行叠加即可得到地基中 M 点的竖向附加应力。

利用公式(1), 对于梯形 I $AODE$ 分布荷载作用下引起的地基中 M 点竖向附加应力可以用三角形 OFD 与三角形 AEF 分布荷载作用下地基中附加应力的差表示, 即

$$\sigma_{z1} = \frac{p_n}{\pi} \left[\frac{a+b}{a} (\theta_1 + \theta_2) - \frac{b}{a} \theta_2 \right] \tag{2}$$

同理, 可以求得梯形 II $CDEB$ 分布荷载作用下引起的地基中 M 点竖向附加应力, 公式如下:

$$\sigma_{z2} = \frac{p_n}{\pi} \left[\frac{a'+b'}{a'} (\theta'_1 + \theta'_2) - \frac{b'}{a'} \theta'_2 \right] \tag{3}$$

式中: $\theta_1, \theta_2, \theta'_1, \theta'_2$ 是图 1 中所示的用弧度表示的角度。将应力叠加, 可得 M 点的竖向附加应力, 公式如下:

$$\sigma_z = (K'_{z1} + K'_{z2}) p_n \tag{4}$$

利用图中三角函数关系, 可得

$$K'_z = K'_{z1} + K'_{z2} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{a+b}{b} \tan^{-1} \frac{a+b}{z} - \frac{b}{a} \tan^{-1} \frac{b}{z} + \frac{a'+b'}{a'} \tan^{-1} \frac{a'+b'}{z} - \frac{b'}{a'} \tan^{-1} \frac{b'}{z} \right] \tag{5}$$

奥斯特伯格公式可以较简单地求出条形基底梯形分布荷载作用时地基中一点 M 的竖向附加应力, 在许多版本的《土力学》教科书中都有介绍。但是, 当点 M 不在坝顶宽度范围内时, 奥斯特伯格公式不再适用, 该方法也不能求出任意点的侧向附加应力和附加剪应力。而工程中往往需要求解梯形顶宽范围以外地基中点 M 的附加应力或应力状态, 因此有

必要根据基本解答推求条形基础梯形分布荷载作用时地基中任意点附加应力的新的求解方法。为此，笔者根据已求得的平面问题基本公式^[2-8]运用几何形体之间的关系和叠加原理，推导出求解条形基础梯形分布荷载作用时地基中任意点的3个附加应力分量普遍解答的若干方法，从而满足工程设计计算需要。

1 条形基础梯形荷载地基任意点附加应力普遍解答的方法

1.1 平面问题地基附加应力计算基本解答

条形基底均布荷载作用下地基附加应力的已有解答是：

$$\begin{cases} \sigma_z = K_s^z p_n \\ \sigma_x = K_s^x p_n \\ \tau_{xz} = K_s^\tau p_n \end{cases} \quad (6)$$

式中： K_s^z, K_s^x, K_s^τ 为条形基底均布荷载作用下的附加应力系数：

$$\begin{cases} K_s^z = \frac{1}{\pi} \left[\tan^{-1} \left(\frac{m}{n} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{m-1}{n} \right) + \frac{mn}{n^2 + m^2} - \frac{n(m-1)}{n^2 + (m-1)^2} \right] \\ K_s^x = \frac{1}{\pi} \left[\tan^{-1} \left(\frac{m}{n} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{m-1}{n} \right) - \frac{mn}{n^2 + m^2} + \frac{n(m-1)}{n^2 + (m-1)^2} \right] \\ K_s^\tau = \frac{1}{\pi} \left[\frac{n^2}{n^2 + (m-1)^2} - \frac{n^2}{n^2 + m^2} \right] \end{cases} \quad (7)$$

条形基底三角形分布荷载作用下地基附加应力的已有解答是：

$$\begin{cases} \sigma_z = K_t^z p_n \\ \sigma_x = K_t^x p_n \\ \tau_{xz} = K_t^\tau p_n \end{cases} \quad (8)$$

式中： K_t^z, K_t^x, K_t^τ 为条形基底三角形分布荷载作用下的附加应力系数：

$$\begin{cases} K_t^z = \frac{1}{\pi} \left\{ m \left[\tan^{-1} \left(\frac{m}{n} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{m-1}{n} \right) \right] - \frac{(m-1)n}{(m-1)^2 + n^2} \right\} \\ K_t^x = \frac{1}{\pi} \left\{ m \left[\tan^{-1} \left(\frac{m}{n} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{m-1}{n} \right) \right] + n \ln \left[\frac{(m-1)^2 + n^2}{m^2 + n^2} \right] + \frac{(m-1)n}{(m-1)^2 + n^2} \right\} \\ K_t^\tau = \frac{1}{\pi} \left\{ n \left[\tan^{-1} \left(\frac{m-1}{n} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{m}{n} \right) \right] + \frac{n^2}{(m-1)^2 + n^2} \right\} \end{cases} \quad (9)$$

1.2 普遍解答的方法 1

如图2，设 M 为地基中任意深度的一点。设三角形 OCE 为区域1，三角形 ADE 为区域2，三角形 BDC 为区域3。利用应力叠加原理，梯形（ $OABC$ ）分布荷载作用时 M 点的竖向附加应力表示如下：

$$\sigma_z = \sigma_{z1} - \sigma_{z2} - \sigma_{z3} \quad (10)$$

式中： $\sigma_{z1}, \sigma_{z2}, \sigma_{z3}$ 分别为区域1、2、3应力分布所引起的地基附加应力：

$$\begin{cases} \sigma_{z1} = K_l^z(m_1, n_1) \frac{b_1 + b_2 + b_3}{b_1} p_n \\ \sigma_{z2} = K_l^z(m_2, n_2) \frac{b_2 + b_3}{b_1} p_n \\ \sigma_{z3} = K_l^z(m_3, n_3) p_n \end{cases} \quad (11)$$

其中 $m_1 = \frac{x}{b_1 + b_2 + b_3}$ $n_1 = \frac{z}{b_1 + b_2 + b_3}$
 $m_2 = \frac{x - b_1}{b_2 + b_3}$ $n_2 = \frac{z}{b_2 + b_3}$
 $m_3 = \frac{x - b_1 - b_2}{b_3}$ $n_3 = \frac{z}{b_3}$

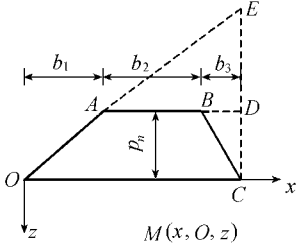


图2 方法1示意图

$K_l^z(m_1, n_1), K_l^z(m_2, n_2), K_l^z(m_3, n_3)$ 可由公式(9)第1式求得。 σ_z 可简略表达为

$$\sigma_z = \sigma_{z1} - \sigma_{z2} - \sigma_{z3} = K_z' p_n \quad (12)$$

同理也可求得地基中任意点 M 处的侧向应力 σ_x 和剪应力 τ_{xz} ，即

$$\sigma_x = \sigma_{x1} - \sigma_{x2} - \sigma_{x3} = K_x' p_n \quad (13)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz1} - \tau_{xz2} - \tau_{xz3} = K_\tau' p_n \quad (14)$$

式(12)~(14)中 K_z', K_x', K_τ' 称为条形基底梯形荷载作用下的附加应力系数：

$$\begin{cases} K_z' = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{b_1} K_l^z(m_1, n_1) - \frac{b_2 + b_3}{b_1} K_l^z(m_2, n_2) - K_l^z(m_3, n_3) \\ K_x' = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{b_1} K_l^x(m_1, n_1) - \frac{b_2 + b_3}{b_1} K_l^x(m_2, n_2) - K_l^x(m_3, n_3) \\ K_\tau' = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{b_1} K_l^\tau(m_1, n_1) - \frac{b_2 + b_3}{b_1} K_l^\tau(m_2, n_2) - K_l^\tau(m_3, n_3) \end{cases} \quad (15)$$

1.3 普遍解答的方法 2

如图 3 所示,设 M 为地基中任意深度的一点。设三角形 OAD 为区域 1,三角形 CBE 为区域 2,矩形 $ODEC$ 为区域 3。利用应力叠加原理,梯形 ($OABC$) 分布荷载作用时 M 点的竖向附加应力表示如下:

$$\sigma_z = \sigma_{z3} - \sigma_{z1} - \sigma_{z2} \tag{16}$$

式中: σ_{z1} σ_{z2} σ_{z3} 分别为区域 1 2 3 应力分布所引起的地基附加应力:

$$\begin{cases} \sigma_{z1} = K(m_1, n_1)p_n \\ \sigma_{z2} = K(m_2, n_2)p_n \\ \sigma_{z3} = K(m_3, n_3)p_n \end{cases} \tag{17}$$

其中

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{-x + b_1}{b_1} & n_1 &= \frac{z}{b_1} \\ m_2 &= \frac{x - b_1 - b_2}{b_3} & n_2 &= \frac{z}{b_3} \\ m_3 &= \frac{x}{b_1 + b_2 + b_3} & n_3 &= \frac{z}{b_1 + b_2 + b_3} \end{aligned}$$

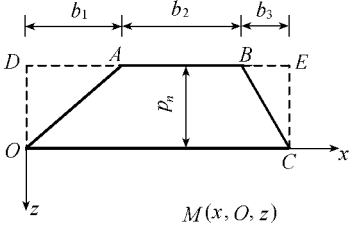


图 3 方法 2 示意图

$K(m_1, n_1)$ $K(m_2, n_2)$ 可由公式 (9) 第 1 式求得, $K(m_3, n_3)$ 可由公式 (8) 第 1 式求得。 σ_z 可简略表达为

$$\sigma_z = \sigma_{z3} - \sigma_{z2} - \sigma_{z1} = K'_z p_n \tag{18}$$

同理也可求得地基中任意点 M 处水平向应力 σ_x 和剪应力 τ_{xz} , 即

$$\sigma_x = \sigma_{x3} - \sigma_{x2} - \sigma_{x1} = K'_x p_n \tag{19}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz3} - \tau_{xz2} - \tau_{xz1} = K'_\tau p_n \tag{20}$$

式 (18)~(20) 中的条形基底梯形荷载作用下的附加应力系数 K'_z 、 K'_x 、 K'_τ 表示如下:

$$\begin{cases} K'_z = K(m_3, n_3) - K(m_2, n_2) - K(m_1, n_1) \\ K'_x = K(m_3, n_3) - K(m_2, n_2) - K(m_1, n_1) \\ K'_\tau = K(m_3, n_3) - K(m_2, n_2) - K(m_1, n_1) \end{cases} \tag{21}$$

1.4 普遍解答的其他方法

根据几何形体之间的关系, 还有其他一些求解方法。如图 4 (a) 所示, 梯形 ($OABC$) 分布荷载作用引起的地基附加应力, 等于三角形 OAD 与矩形 $DAEC$ 分布荷载作用引起的地基附加应力之和与三角形 BEC 分布荷载作用引起的地基附加应力之差。

如图 4 (b) 所示, 梯形 ($OABC$) 分布荷载作用引起的地基附加应力, 等于三角形 OAD 、矩形 $DABE$ 、三角形 BEC 分布荷载作用引起的地基附加应力之和。应用上述方法, 并将条形基础均布荷载作用下地基附加应力和条形基础三角形荷载作用下地基附加应力组合、叠加, 可以得到地基中一点 M 的附加应力, 这里不一一赘述。

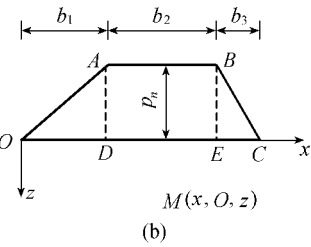
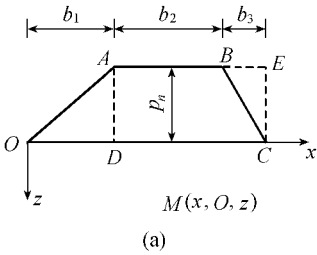


图 4 其他方法示意图

2 算 例

某河道堤坝的横断面为梯形, 其横断面情况如图 5 所示, 求堤坝下地基中点 M_1 (7m, 0.4m) 和边缘外 M_2 (17m, 0.4m) 处由堤坝自重引起的竖向附加应力。

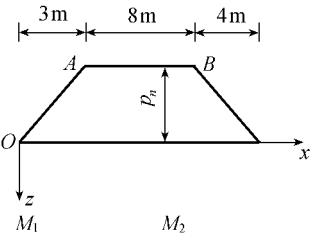


图 5 算例示意图

2.1 求 M_1 处的竖向附加应力

因为 M_1 处于堤坝宽度范围内, 可通过奥斯特伯格方法和笔者的方法 1 和方法 2 求解。设地基土密度为 1900 kg/m^3 , 则 p_n 为 57 kPa 。

a. 用奥斯特伯格方法求解。由式 (4) 可求得 M_1 点的竖向附加应力为

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{p_n}{\pi} \left[\frac{a+b}{a} (\theta_1 + \theta_2) - \frac{b}{a} \theta_2 \right] + \\ &\frac{p_n}{\pi} \left[\frac{a'+b'}{a'} (\theta'_1 + \theta'_2) - \frac{b'}{a'} \theta'_2 \right] = \\ &51.500 \text{ (kPa)} \end{aligned}$$

b. 用本文方法 1 求解。由式 (15) 第 1 式可以

求得附加应力系数 $K'_z = 0.903$, M_1 处的竖向附加应力为

$$\sigma_z = \sigma_{z1} - \sigma_{z2} - \sigma_{z3} = K'_z p_n = 51.471(\text{kPa})$$

用奥斯特伯格方法求解的结果为 51.500kPa ,与本文方法 1 求解的结果 51.471 kPa 相比误差很小 ,可见本文方法具有一定的可靠度。同理 ,也可以求出 M_1 点的侧向附加应力和附加剪应力 ,分别为 $\sigma_x = 17.613 \text{ kPa}$, $\tau_{xz} = 0.741 \text{ kPa}$ 。

2.2 求 M_2 处的竖向附加应力

由于 M_2 处于堤坝宽度范围外 ,奥斯特伯格方法不能够求得解答 ,采用本文方法 1 和方法 2 都可以求解 M_2 处的竖向附加应力 ,以下应用方法 2 求解。由式 (21)第 1 式可以求得附加应力系数 $K'_z = 0.101$, M_2 处的竖向附加应力为

$$\sigma_z = \sigma_{z3} - \sigma_{z2} - \sigma_{z1} = K'_z p_n = 5.757(\text{kPa})$$

同理 ,也可以求出 M_2 点的侧向附加应力和附加剪应力 $\sigma_x = 14.307 \text{ kPa}$, $\tau_{xz} = 8.608 \text{ kPa}$ 。

3 结 语

奥斯特伯格方法的优点在于可以较简便地求解堤坝宽度范围内地基中任意一点 M 的竖向附加应力 ,但是当 M 点位于堤坝宽度范围外的地基中时 ,奥斯特伯格方法就不再适用 ,无法满足工程计算的需要 ,该课题 50 余年没有新突破。本文提出的普遍解答方法克服了文献 [9-10] 的适应缺陷 ,可以方便

地求解出堤坝范围内和范围外地基中任意一点附加应力的 3 个分量 ,计算适应性广 ,具有一定的使用价值。对于土的弹塑性特性及水平位移对土石坝 (堤)基础应力的影响 ,笔者将作为后续课题进一步深入研究。

参考文献 :

[1] OSTERBERG J O. Influence value for vertical stresses in a semi-infinite mass due to an embankment loading[C]/Proc 4th Int Conf Soil Mechs Fndn Engrg.[S.1.][s. n.],1957.1 : 393-398.
[2] 高大钊.土质学与土力学[M].3 版.北京 :人民交通出版社 2001.
[3] 卢廷浩.土力学[M].2 版.南京 :河海大学出版社 2005.
[4] 施建勇. Soil mechanics[M].北京 :人民交通出版社 2004.
[5] 松冈元.土力学[M].罗汀 ,姚仰平 ,译.北京 :中国水利水电出版社 2001.
[6] 陈晓平 ,陈书审.土力学与地基基础[M].武汉 :武汉工业大学出版社 2002.
[7] 赵树德.土力学[M].北京 :高等教育出版社 2001.
[8] 刘成宇.土力学[M].北京 :中国铁道出版社 2005.
[9] 雷胜友 ,惠会清.垂直条形均布荷载下的地基附加应力推导[J].西安工业大学学报 2008 28(1) :72-75.
[10] 邵艳.梯形分布荷载下地基附加应力计算方法[J].合肥工业大学学报 :自然科学版 2004 27(5) :575-578.

(收稿日期 2009-01-12 编辑 :高建群)

(上接第 40 页) 水污染联防中污染源总量限排意见 ,来制定淮河流域未来的水质管理方案与规划目标 ,才能有效地改善淮河流域水污染现状 ,有效地避免突发性污染事故的发生。

参考文献 :

[1] THI V H L , HUU N N , ERIC W. The combined impact on the flooding in Vietnam 's Mekong River delta of local man-made structures , sea level rise , and dams upstream in the river catchmen[J]. Estuarine , Coastal and Shelf Science , 2007 , 71 (1-2) : 110-116.
[2] WILLIAM L G. Downstream hydrologic and geomorphic effects of large dams on American rivers[J]. Geomorphology , 2006 , 79(3/4) : 336-360.
[3] LUCIA S , GUSTAVO M. The world commission on dams : a fundamental step towards integrated water resources management and poverty reduction. A pilot case in the Lower Zambezi , Mozambique[J]. Physics and Chemistry of the Earth , 2005 , 30(11/16) : 976-983.
[4] WANG Hou-jie , YANG Zuo-sheng , YOSHIKI S. Interannual

and seasonal variation of the Huanghe(Yellow River) water discharge over the past 50 years : connections to impacts from ENSO events and dams[J]. Global and Planetary Change , 2006 , 50(3/4) : 212-225.
[5] LIU Chang-ming , XIA Jun. Water problems and hydrological research in the Yellow River and the Huai and Hai River basins of China[J]. Hydrology . Process , 2004 , 18 : 2197-2210.
[6] XIA JUN , CHEN Y D. Water problems and opportunities in hydrological Sciences in China[J]. Hydrological Science Journal , 2001 , 46(6) : 907-921.
[7] STONE R , JIA H. Going against the flow : the chinese government has begun a massive engineering project to divert water from three southern rivers to parched north with unknown consequences[J]. SCIENCES , 2006 , 313(25) : 1034-1037.
[8] Danish Hydraulic Institute. A modeling system for rivers and channels User Guide[R]. Denmark : Danish hydraulic Institute , 2003 : 29-201.
[9] Danish Hydraulic Institute. A modeling system for rivers and channels reference manual[R]. Denmark : Danish Hydraulic Institute , 2003 : 145-147.

(收稿日期 2008-08-27 编辑 :方宇彤)