

DOI :10.3880/j.issn.1006-7647.2010.02.006

用局部间断伽辽金有限元法分析渗流场

何朝葵,速宝玉,盛金昌,詹美礼

(河海大学水利水电学院,江苏 南京 210098)

摘要 把局部间断伽辽金有限元法(LDG)运用到渗流分析中,编制了 LDG 法渗流分析的计算程序,运用该程序对均质或非均质渗流场分布进行分析,把所得结果与解析解或一般有限元法所得结果进行比较,证明 LDG 法在渗流分析中是十分有效的。

关键词 间断有限元法;局部间断伽辽金有限元法;渗流

中图分类号 :TD853.34 **文献标识码** :A **文章编号** :1006-7647(2010)02-0021-03

Analysis of seepage fields by use of local discontinuous Galerkin finite element method//HE Zhao-kui, SU Bao-yu, SHENG Jin-chang, ZHAN Mei-li (College of Water Conservancy and Hydropower Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract :The local discontinuous Galerkin (LDG) finite element method was applied to the analysis of seepage fields. A computer program for the solution of LDG was worked out. The seepage fields of homogeneous or non-homogeneous aquifers were analyzed by use of the computer program. The calculated results were compared with those of analytical solution and general finite element methods. The effectiveness of LDG in the analysis of seepage fields was validated.

Key words :discontinuous Galerkin method ;local discontinuous Galerkin finite element method ;seepage

渗流计算是水利工程设计、建设中十分关键的一环,准确的渗流计算可以给工程提供可靠的安全保障,也对工程建设的费用起指导作用。由于水利工程的地基和边界条件非常复杂,所以进行渗流计算是一件非常艰巨的任务。虽然目前有多种有效的渗流计算的数值计算方法,但是探讨新的渗流计算方法、发挥它们的特点、简化计算或提高精度仍然十分必要。间断有限元法(DG)是在有限元法、有限体积分法和有限差分法基础上发展起来的一种新的数值计算方法,它最早是在 1973 年由 Reed 和 Hill 在关于中子输运方程问题的报告论文中提出的,现已广泛应用到水动力学、气动力学、波传播等问题^[1-4]。与一般有限元法相比,DG 的优点在于没有强制要求插值函数在剖分单元边界处连续,单元代数方程之间是通过数值流通量来建立联系,所以对不同的剖分单元可采用不同形式、不同次数的逼近多项式,因而其计算格式具有很好的灵活性。数值流通量的形式有不同类型,其形式直接影响计算的稳定性,间断有限元根据数值流通量的形式又分为不同类型,其中比较突出的一种是 Cockburn 和 Shu 提出的局部间

断伽辽金有限元法(LDG)。LDG 法在定义数值流通量中引入稳定项,通过选取适当的稳定因子,使得总体代数方程的系数矩阵具有对称、正定的特征,从而保证了计算格式的稳定性。

渗流问题对应的数学模型为椭圆形方程定解问题。国内外关于椭圆形方程的间断有限元法原理及计算格式有不少文献论述^[1,5-7],但是就具体考虑渗流问题国外还是不多^[8-10],国内则目前还没查到相关的文献。笔者根据 LDG 法的原理,参考相关文献,推导出针对具有已知水头和已知流量边界且非均质承压含水层渗流问题的 LDG 法计算格式,编制了相应的计算程序,通过数值计算,结果表明利用 LDG 法分析渗流场是十分有效的。

1 渗流问题局部间断有限元法计算格原理

考虑稳定渗流问题

$$-\nabla \cdot (D \nabla u) = f \quad (x, y) \in \Omega \tag{1}$$

边界条件

$$u = g_D \quad (x, y) \in \Gamma_D \tag{2}$$

$$D \frac{\partial u}{\partial n} = g_N \quad (x, y) \in \Gamma_N \tag{3}$$

基金项目 国家自然科学基金(50779012)

作者简介 何朝葵(1974—),男,湖南郴州人,讲师,博士研究生,从事渗流计算研究。E-mail :hzk@hhu.edu.cn

其中 $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$ 且 $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \Phi$

$$D = \text{diag}(D_x, D_y)$$

式中： u 为水头函数； D 为渗透矩阵； D_x 和 D_y 为渗透系数。引入中间变量 $\sigma = \nabla u$ ，则问题变成一阶方程组的形式：

$$-\nabla \cdot D\sigma = f \tag{4}$$

$$\sigma = \nabla u \tag{5}$$

用 T 表示 Ω 的任意一个划分， ∂T 表示 T 的所有边界 e 的集合。设 E 为其中 1 个单元。在式(4)和式(5)两边乘以光滑的测试函数 v 和 τ ，并在 E 上积分，利用分部积分整理得原问题的弱解公式：

$$\int_E D\sigma \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial E} D\sigma \cdot n v \, ds = \int_E f v \, dx \tag{6}$$

$$\int_E \sigma \tau \, dx + \int_E u \cdot \nabla \tau \, dx - \int_{\partial E} \tau \cdot u n \, ds = 0 \tag{7}$$

式中： n 为 ∂E 的单位外法向量。

引入数值流通量，且对所有剖分单元叠加，得

$$\int_{\Omega} D\sigma_h \cdot \nabla v \, dx - \sum_{e \in \partial T} \int_e \hat{D}\sigma \cdot n v \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx \tag{8}$$

$$\int_{\Omega} \sigma_h \tau \, dx + \int_{\Omega} u_h \cdot \nabla \tau \, dx - \sum_{e \in \partial T} \int_e \tau \cdot \hat{u} n \, ds = 0 \tag{9}$$

其中 $\hat{u}$ 、 $\hat{D}\sigma$ 分别称为物理量 u 和 $D\sigma$ 在单元边界处的数值流通量，是物理量在单元边界处的近似值，由于插值函数在单元边界可能不连续，故物理量在单元边界两边的值可能不同，所以数值流通量的值与单元边界两边的值有关。单元方程之间通过数值流通量建立联系，组合成整体方程。根据 LDG 法定义数值流通量形式为^[1]

$$\begin{cases} \hat{u}|_e = u + \beta \cdot u \\ \hat{D}\sigma|_e = D\sigma - \beta D\sigma - \alpha u \end{cases} \tag{10}$$

若 e 为 Ω 的边界部分，则

$$\hat{u}|_e = \begin{cases} g_D & e \subset \Gamma_D \\ u & e \subset \Gamma_N \end{cases} \tag{11}$$

$$\hat{D}\sigma|_e = \begin{cases} D\sigma - \alpha(u - g_D)n & e \subset \Gamma_D \\ g_N & e \subset \Gamma_N \end{cases} \tag{12}$$

其中

$$\alpha = \frac{\eta_e D_e}{h_e}$$

$$h_e = \begin{cases} \max\{h_{E_1}, h_{E_2}\} & e \in \partial E_1 \cap \partial E_2 \\ h_E & e \in \partial E \cap \partial\Omega \end{cases}$$

$$D_e = \begin{cases} \max\{\lambda_{E_1}, \lambda_{E_2}\} & e \in \partial E_1 \cap \partial E_2 \\ \lambda_E & e \in \partial E \cap \partial\Omega \end{cases}$$

式中： α 为稳定因子，对计算格式的稳定性起关键作用； λ_E 为 E 单元渗透系数矩阵的最大特征根， η_e 为常数， $\eta_e > 0$ 。

把数值流通量及 σ_h 、 u_h 用基函数表示的近似插值表达式代入式(8)和式(9)， v 和 τ 分别依次选为基函数。由于 σ_h 在式(9)中与相邻单元无关，所以由式(9)可局部解出 σ_h ，代入式(8)即可消掉 σ_h 。消掉 σ_h 后式(8)化为一个关于 u_h 的插值系数的代数方程组，解该代数方程组就得到水头函数在每一单元内的近似表达式。

2 数值算例

2.1 均质含水层

考虑承压含水层稳定渗流问题：有一长 20 m、高 10 m 的分块各向同性介质的含水层，上下为不透水边界，左右边为已知水头边界，左边水头为 40 m，右边水头为 20 m(见图 1)。

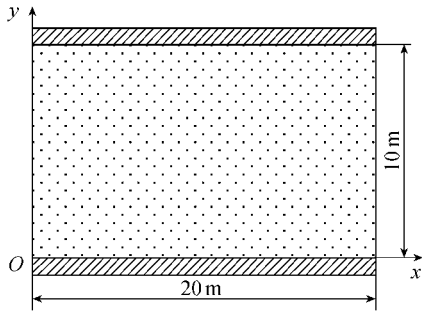


图 1 均质承压含水层

该渗流问题的解析解为

$$u(x, y) = 40 - x$$

运用 LDG 法分析该渗流场，对渗流区域采用长 40 等分、高 20 等分的四边形剖分，每一单元为边长 0.5 m 的正方形，所以 Δx 和 Δy 都为 0.5 m。

在每一单元内对于 σ_h 、 u_h 都做如下二维一次线性插值：

$$u_h|_{E_i} = \sum_{l=0}^2 u_i^l \varphi_i^l(x, y)$$

$$\sigma|_{E_i} = \left(\sum_{l=0}^2 q_i^l \varphi_i^l(x, y), \sum_{l=0}^2 p_i^l \varphi_i^l(x, y) \right)$$

其中基函数取为

$$\varphi_i^0(x, y) = 1$$

$$\varphi_i^1(x, y) = \frac{2(x - \bar{x}_i)}{\Delta x}$$

$$\varphi_i^2(x, y) = \frac{2(y - \bar{y}_i)}{\Delta y}$$

$(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ 为单元 E_i 的重心坐标。该组基函数为一组具有正交性质的基函数，选取它便于计算。对 σ_h 和 u_h 都做 k 次插值，所得结果比对 u_h 和 σ_h 分别做 k 和 $k - 1$ 次插值的结果精度要高^[1]。数值流通量表达式中参数取 $\beta = (1/2, 1/2)$ ， $\eta_e = 0.01$ 。

就 LDG 法所得结果，取剖分中底部部分单元下

边界中点处水头值,与解析解进行比较,结果如图 2 所示,最大误差为 0.7 m。

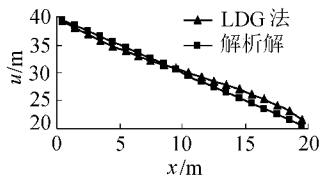


图 2 LDG 法与解析解所得结果比较

2.2 非均质含水层

如果在上述均质含水层中加入一防渗帷幕(见图 3),且假设防渗帷幕的渗透系数和含水层的渗透系数比为 1:1 000。采用处理均质问题时同样的剖分、同样的插值函数。运用 LDG 法求解,根据所求结果画出等水头线,曲线从左到右依次对应的水头为 39 m,38 m,37 m,⋯,22 m,21 m(图 4)。

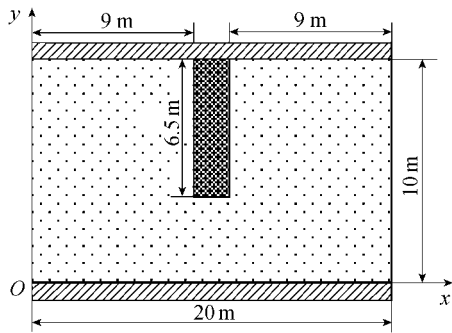


图 3 非均质含水层

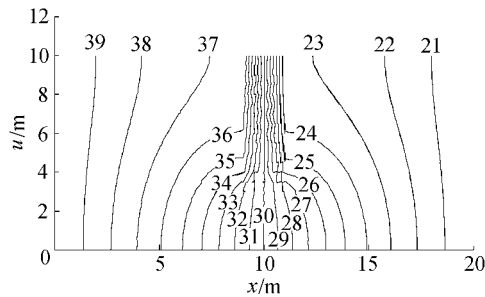


图 4 局部 LDG 法所得等水头线(单位:m)

对同一情形采用同样剖分和双线性插值,用一般有限元法进行计算,根据所得结果画相应的等水头线(图 5)。

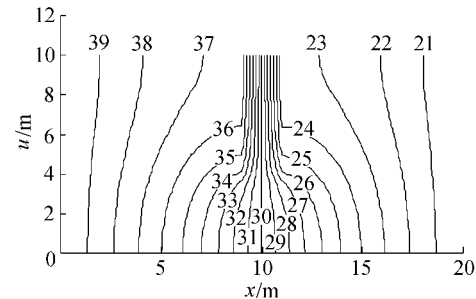


图 5 一般有限元法所得等水头线(单位:m)

对每一单元形心处水头值就 2 种方法所得数值结果进行比较,最大误差仅为 0.34 m。

以上 2 个算例说明利用 LDG 法来分析地下水渗流场是可行的,也是十分有效的。

3 结 语

探讨了 LDG 法在渗流计算中的应用,计算实例表明 LDG 法在渗流计算中是十分有效的。由于它剖分单元的随意性,所以其具有比较易于处理复杂边界条件和复杂区域渗流问题的优势,也利于进行并行运算。因此,LDG 法在渗流计算中具有很好的应用前景,但其存在一个明显的缺陷,即得到的总体代数方程组的系数矩阵阶数远比一般有限元法对应的系数矩阵阶数大。如何利用 LDG 法的优点又克服这一不足是下一步将要进行的研究工作。

参考文献:

[1] COCKBURN B, KAMIADAKIS G E, SHU Chi-wang, et al. Discontinuous galerkin methods[M]. Berlin :Springer Verlag, 2000 :89-101.

[2] PERUGIA I, SCHÖTZAU D. An hp-analysis of the local discontinuous galerkin method for diffusion problems[J]. J Sci Comp, 2002,17 :561-571.

[3] 刘儒勋,舒其望. 计算流体力学的若干新方法[M]. 北京: 科学出版社,2003 :159-179.

[4] 刘儒勋,王志峰. 数值模拟方法和运动界面追踪[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社,2001 :148-165.

[5] ARNOLD D N, BREZZI F, COCKBURN B, et al. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems[J]. SIAM J Numer Anal,2002,39(5) :1749-1779.

[6] CASTILLO P. Performance of discontinuous Galerkin methods for elliptic pde's[J]. SIAM J Sci Comput,2002,24(2) :524-547.

[7] KARAKASHIAN O A, PASCAL F. A posteriori error estimates for a discontinuous Galerkin approximation of second-order elliptic problems[J]. SIAM J Numer Anal, 2003,41(6) :2374-2399.

[8] FAGHERAZZI S, FURBISH D J, RASSETARINERA P, et al. Application of the discontinuous spectral Galerkin method to groundwater flow [J]. Advances in Water Resources, 2004, 27 :129-140.

[9] BREZZI F, HUGHES T J R, MARINI L D, et al. Mixed discontinuous Galerkin methods for Darcy flow[J]. SIAM J Sci Comput,2005(22/23) :119-145.

[10] THOMAS J R H, MASUD A, WAN Jing. A stabilized mixed discontinuous Galerkin method for Darcy flow [J]. Comput Methods Appl Mech Engrg,2006,195 :3347-3381.

(收稿日期:2009-06-16 编辑:高建群)