

DOI :10.3880/j. issn. 1006-7647. 2010. 03. 004

用分数型布朗运动模拟海湾的剪切湍流分散

瞿 波¹, 保尔·爱迪生²

(1. 南通大学理学院, 江苏 南通 226007; 2. 英国卡迪欧数值公司, 苏格兰爱丁堡 EH33 1EH)

摘要 采用传统的布朗运动粒子跟踪模型和改进的分数型布朗运动粒子跟踪模型分别研究海湾的剪切湍流的分散。认为布朗运动和分数型布朗运动的幂律法则对简单的剪切扩散预测较为精确, 通过控制 Hurst 指数可以控制剪切分散对海湾回流区的影响。研究表明, 在简单的海湾模型中, 明显的剪切分散出现在主流方向的海湾入口处 随着纵向水流 Hurst 指数的增加, 横向水流的指数会相应地减少。

关键词 剪切分散 费克扩散 分数型布朗运动 ;Hurst 指数

中图分类号 :TV131.4 **文献标识码** :A **文章编号** :1006-7647(2010)03-0012-05

Modeling dispersion of shear turbulent flows in coastal bay by using fractional Brownian motion//QU Bo¹, ADDISON Paul S²(1. School of Sciences, Nantong University, Nantong 226007, China ;2. Cardio Digital Ltd., Edinburgh EH33 1EH, United Kingdom)

Abstract :The traditional Brownian motion particle tracing models and the modified fractional Brownian motion particle tracing models were employed to simulate the dispersion of shear turbulent flows in coastal bay. The power rules of the Brownian motion and the fractional Brownian motion were regarded to be accurate for predicting simple shear dispersion. The influences of shear dispersion on the backflow zone in the coastal bay were governed by controlling the Hurst exponent. The results indicate that in the simple models for the coastal bay, significant shear dispersion occurs at the entrance of the bay along the direction of the main flows. Direction. With the increase of the Hurst exponent of the longitudinal flows, the Hurst exponent of the transverse flows correspondingly decreases.

Key words :shear dispersion ;Fickian diffusion ;fractional Brownian motion ;Hurst exponent

1 分数型布朗运动粒子追踪模型

非费克(non-Fickian)扩散经常会在流体的扩散过程中表现出来,因为流体中速度场具有长距离的相互关联性,也称拉格朗日记忆^[1]。传统的粒子追踪技术只能模拟相互无关的随机散步(布朗运动)所产生的费克(Fickian)扩散过程。为了模拟粒子的连续运动,Mandelbrot^[2]发现分数型布朗运动(fBm)可以模拟连续运动的随机分形,于是建立了分数型布朗运动粒子追踪(FBM)模型。Qu^[3]在 Mandelbrot 的 FBM 模型^[4]的基础上,通过对核的变形改进了原来的模型,发展成 FBMINC 模型。FBMINC 模型不仅使 fBm 的表达式简单化,而且克服了它原来的一些弊病。FBMINC 模型的定义为

$$B_H(i) - B_H(i - 1) = \frac{1}{\Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right)} .$$

$$\left\{ \sum_{j=i-M}^{i-2} \left[(i-j)^{H-\frac{1}{2}} - (i-j-1)^{H-\frac{1}{2}} \right] \cdot R(j) + R(i-1) \right\} \tag{1}$$

$$\Delta B_H(t) = B_H(t) - B_H(0) = \sum_{i=1}^t [B_H(i) - B_H(i-1)] \tag{2}$$

式中 : $B_H(t)$ 为描述 fBm 的参数 ; $R(i)$ 为取样于高斯概率离散分布的随机步骤 ; H 为 Hurst 指数 ; M 为描述有限记忆的参数, M 越大则 $B_H(t)$ 越精确。当 $H = 0.5$ 时, $\Delta B_H(t)$ 得到离散时间的高斯白噪声,这时粒子的运动就变成了布朗运动。

众所周知,流体中污染物的运动主要包含对流和扩散。一群代表污染物的不规则粒子在 $t = 0$ 时从平面内一点释放出去,然后粒子云沿网格点对流。粒子在 i 时的位移为这一时间段上对流部分加上扩散部分(fBm 增量)的位移 :

$$\Delta x_i = U(i)\Delta t + \Delta B_{Hx}(i) \quad (3)$$

$$\Delta y_i = V(i)\Delta t + \Delta B_{Hy}(i) \quad (4)$$

式中 $\Delta B_{Hx}(i)$ 及 $\Delta B_{Hy}(i)$ 分别为粒子在 x 及 y 方向上每一步的扩散位移,也就是由式(2)定义的 2 个独立的 fBm 增量; $U(i), V(i)$ 分别为粒子在 x 和 y 方向的速度分量。

将边界反射与 fBm 的连续性一起考虑,在边界上为了产生反射轨迹,整个 fBm 轨迹的正负号必须因反射而改变,这样既能产生反射轨迹,又不破坏 fBm 的记忆。

FBMNC 模型在沿海污染物的传播领域已有很广泛的应用^[5-12]。当 Hurst 指数 $H = 0.5$ 时为布朗运动,是费克扩散; $0 < H < 1$ ($H \neq 0.5$) 时为 fBm,是非费克扩散。fBm 粒子分布云的标准偏差遵循以下关系:

$$\sigma = (2D_f t)^H \quad (5)$$

式中扩散系数 D_f 是常数。注意到当 $H = 0.5$ 时是费克扩散(这时把扩散系数记为 D)。 D_f 与其相对应的费克扩散中 D 的关系为

$$(2D_f t)^H = (2Dt)^{1/2} \quad (6)$$

因此

$$D = 2^{2H-1} D_f^{2H} t^{2H-1} \quad (7)$$

根据一些水利研究者及科学家的分析,在小范围的沿海区域, D_f 一般在 $0.01 \sim 0.02 \text{ m}^2/\text{s}$ 范围内取值^[13-14]。文中取 $D_f = 0.01 \text{ m}^2/\text{s}$ 。

2 简单的布朗剪切分散

沿速度梯度方向产生的剪切和分散对水流传播方向具有很大的影响。Chatwin 等^[15]给出了如下定义:剪切分散是由横向剪切的平均流速和横向扩散产生的平流。

首先考虑在 x 和 y 方向上扩散系数都等于 D 的费克扩散,如果没有剪切流动,在时间 t 以后 2 个方向上的方差分别为

$$\sigma_x^2 = 2Dt \quad (8)$$

$$\sigma_y^2 = 2Dt \quad (9)$$

Townsend^[16]发现线性剪切流的浓度分布保留其高斯形式,但方差与中心的分散已彻底改变了。假设速度 v 在 y 方向是 x 的函数,即 $v(x)$,则剪切流的速度将随 x 的增加而线性增加。

Foister 等^[17]通过求解对流扩散方程对时间的概率密度得到粒子云剪切分散的方差:假设在 x 和 y 方向上的扩散都是费克扩散,2 个扩散系数都设为 D ,在简单的剪切作用下,方差将变成

$$\sigma_x^2 = 2Dt \quad (10)$$

$$\sigma_y^2 = 2Dt + \frac{2}{3} \alpha^2 Dt^3 \quad (11)$$

式中 α 为流速 v 的梯度^[17]。

Compte^[18]使用连续时间随机游动的方法,以另一种方式确定了运动的概率。然而,他的计算结果和式(11)的结果是一样的。对于更大的时间段,式(11)可简化为

$$\sigma_y^2 = \frac{2}{3} \alpha^2 Dt^3 \quad (12)$$

为了验证这些研究结果,笔者构造了一个简单的渠道,渠道尺寸为 $2000 \text{ m} \times 5000 \text{ m}$ (宽 $\times$ 长),网格间隔为 $50 \text{ m} \times 100 \text{ m}$ 。 x 方向的速度设为零, y 方向的速度设为 $v(x) = -0.0003x$ 。

预计剪切分散发生在沿主流的方向上(由北到南)。在渠道的上方(1000,5000)处释放粒子云。只考虑 x 方向上的简单费克扩散,在无剪切分散的前提下得到 $\sigma_x^2 = 2Dt, \sigma_y^2 = 0$ 。在有剪切分散的前提下,方差为

$$\sigma_x^2 = 2Dt \quad (13)$$

$$\sigma_y^2 = \frac{2}{3} \alpha^2 Dt^3 \quad (14)$$

对式(13)两边取对数,得

$$\ln \sigma_x = \frac{1}{2} \ln(2D) + \frac{1}{2} \ln t \quad (15)$$

$$\text{grad} \left(\frac{\ln \sigma_x}{\ln t} \right) = 0.5 \quad (16)$$

对式(14)两边取对数,得

$$\ln \sigma_y = \ln(\alpha \sqrt{0.667D}) + \frac{3}{2} \ln t \quad (17)$$

$$\text{grad} \left(\frac{\ln \sigma_y}{\ln t} \right) = 1.5 \quad (18)$$

当 $\alpha = 0.0003, D = 0.01$ 时, $\ln \sigma_x$ 和 $\ln \sigma_y$ 分别为

$$\ln \sigma_x = -1.956 + \frac{1}{2} \ln t \quad (19)$$

$$\ln \sigma_y = -10.617 + \frac{3}{2} \ln t \quad (20)$$

在(1000,5000)处释放 1000 个粒子云,到 1000 个时间步长($\Delta t = 10 \text{ min}$)时把 $\ln \sigma_x$ 和 $\ln \sigma_y$ 对 $\ln t$ 的比值计算出来($H = 0.5$),见图 1。由图 1 可知, $\ln \sigma_x$ 和 $\ln \sigma_y$ 轴上的截距 A_x, A_y 分别为 -1.895 和 -10.717 。图中的 Hurst 指数 $H_{\text{图}} = \text{grad} \left(\frac{\ln \sigma_x}{\ln t} \right) = 0.497 \approx 0.5$ 。由式(15)~(20)计算得出 A_x 和 A_y 分别为 -1.956 和 -10.617 ,此时 $H = 0.5$ 。由此可知,数值模拟结果与计算结果非常接近。

3 分数型布朗运动剪切分散

假设没有剪切分散,则 $\sigma_x^{1/H} = 2D_f t, \sigma_y^{1/H} = 0$ 。

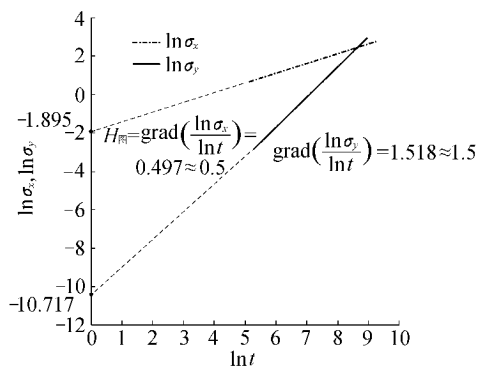


图1 简单渠道中 $\ln\sigma_x$ 和 $\ln\sigma_y$ 对 $\ln t$ 的比值($H=0.5$)

在简单的剪切分散(即只考虑沿主流方向的扩散)情况下,期待

$$\sigma_x^{1/H} = 2D_f t \quad (21)$$

$$\ln\sigma_x = H\ln(2D_f) + H\ln t \quad (22)$$

令常数 $C = 1/3$, $H = 0.5$, 对照式(14), 假设在 y 方向的扩散符合

$$\sigma_y = \sqrt{C}\alpha 2^H D_f^H t^{1+H} \quad (23)$$

当 $\alpha = 0.0003$ 和 $D_f = 0.01$ 时, 由式(21)得

$$A_x = H\ln(2D_f) = -3.912H \quad (24)$$

不同的 H ($0 < H < 1$) 对应的 A_x 可以计算出来(表1)。

表1 不同的 H 对应的截距

H	$H_{\text{图}}$	A_x			A_y
		期待值	数值模拟值	式(23)计算值	
0.5	0.497	-1.956	-1.895	-1.944	-10.717
0.6	0.593	-2.347	-2.335	-2.320	-11.221
0.7	0.685	-2.738	-2.663	-2.680	-11.580
0.8	0.772	-3.130	-2.918	-3.020	-11.877
0.9	0.848	-3.521	-3.054	-3.317	-12.057

注: $H_{\text{图}}$ 为从图中得到的 Hurst 指数, $\Delta t = 10 \text{ min}$, 粒子云数 $P = 1000$, 时间步长为 100。

由表1可知, 计算值比数值模拟值更加接近期待值。然而, 数值模拟和计算得到的 H 和 A_x 都稍低于期望值, 其原因目前尚不清楚。

现在考虑水流方向上的剪切分散。在 $\ln\sigma_x$ 和 $\ln\sigma_y$ 轴上的截距 A_x 和 A_y 分别由表1给出。

由式(23)可得

$$\ln\sigma_y = \ln(\sqrt{C}\alpha) + H[\ln(2D_f)] + (1+H)\ln t \quad (25)$$

仍设 $\alpha = 0.0003$, $D_f = 0.01$, 则由式(25)所得的 $\ln\sigma_x$ 轴上的截距 A_y 为

$$A_y = \ln(0.0003\sqrt{C}) - 3.9120H \quad (26)$$

因此

$$\ln\sqrt{C} = A_y + 3.9120H + 8.1117 \quad (27)$$

将表1中的 A_y 代入式(27)即可求得 C 。当 H

分别为 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 时, 计算得出 C 分别为 0.2729, 0.2180, 0.2323, 0.2804, 0.4278。

在(1000, 5000)处释放 1000 个粒子云, 到 100 个时间步长($\Delta t = 10 \text{ min}$)时把 $\ln\sigma_x$ 和 $\ln\sigma_y$ 对 $\ln t$ 的比值计算出来($H = 0.6$), 见图2。由图2可得 $\ln\sigma_y$ 轴上的截距 A_y 和相应的 C , 同理可得 $H = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ 时的 A_y 和 C , 见表2。由此可见, 式(23)是一个很好的假设方程。因此, fBm 的剪切分散可由式(23)和 $C = 0.3$ 决定。增加粒子云数, 结果会更加准确, 可以证明 fBm 剪切分散的常数 C 实际上就等于 1/3。

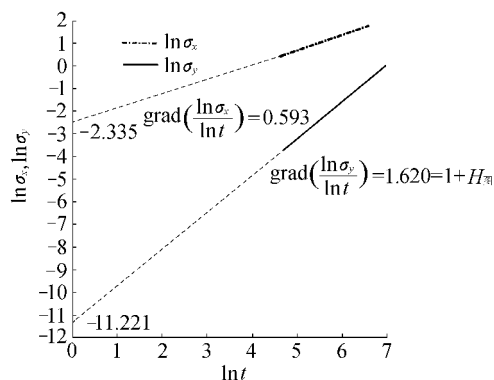


图2 简单渠道中 $\ln\sigma_x$ 和 $\ln\sigma_y$ 对 $\ln t$ 的比值($H=0.6$)

表2 测试所得 A_y 和 C

H	$H_{\text{图}}$	A_y	C
0.5	0.518	-10.717	0.3142
0.6	0.620	-11.221	0.2547
0.7	0.713	-11.580	0.2572
0.8	0.803	-11.877	0.2871
0.9	0.883	-12.057	0.3746

4 沿海湾回流区的剪切分散

这里将简单地讨论剪切分散发生在沿海湾模型的主流区和回流区之间的情形。假设主流速仍由北向南, $0 < x < 1200$, $0 < y < 5000$ (y 的方向是由南向北, 与主流速方向相反), 见图3。1200 $< x < 2000$ 之间是回流区, 这时 $2000 < y < 2800$, 见图4。图4显

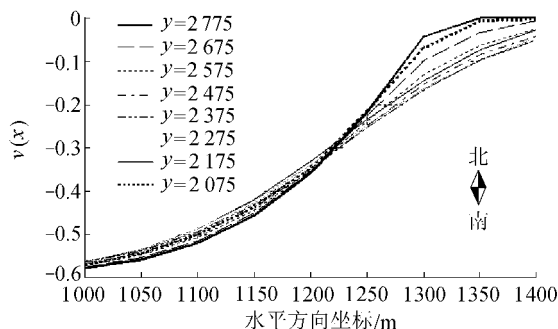


图3 海湾进口地带的水流速度

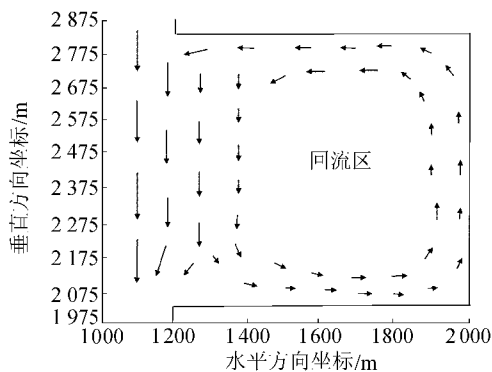


图4 海湾进口地带及回流区边界的剪切分散

示了速度矢量在回流区的循环模式。由图3~4可以看出,在 $x = 1200$ 和 $x = 1400$ 之间 y 方向的速度有明显的增加。这一地区形成了主流区和回流区的剪切带。考虑到海湾(回流区)的入口处不仅 y 方向的速度增加,而且 x 方向的速度也增加(从右到左)。速度矢量的方向在这一地区也发生变化,一般由北向南,从回流区向主流区沿 x 方向增加。因此,剪切分散应该与 x 方向正交,即沿 y 方向发展。

海湾进口地带及回流区边界的剪切分散见图4。由图4可知,垂直速度 $v(x)$ 沿 $-x$ 方向非线性减小($1000 < x < 1400$),在海湾的顶部和底部角落处的流速梯度最大($2075 < y < 2775$)。因为跨越整个区域的速度不是线性变化,并且速度方向不断地改变,因而并不是简单的剪切分散。

如果不计 y 方向的扩散,可以生成一群粒子云^[3],计算出 $\sigma_x(t)$ 和 $\sigma_y(t)$ 。记录(1250,2775)处从左上角的海湾区释放出费克粒子云后($H = 0.5$)每10 min $\ln\sigma_x$ 和 $\ln\sigma_y$ 对 $\ln t$ 的值(总时间为1 h),将各时刻的最佳逼近值连成最佳逼近线,见图5。最佳

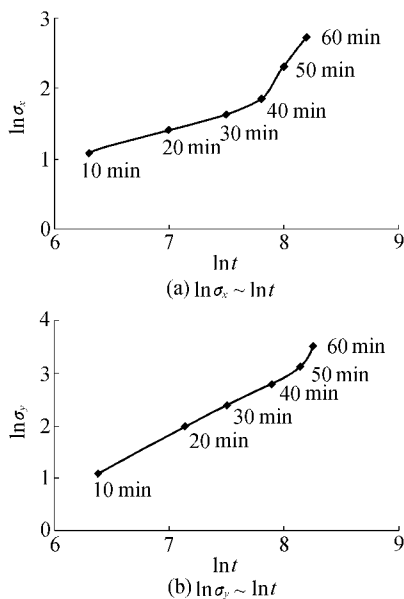


图5 海湾剪切区 $\ln\sigma_x$ 和 $\ln\sigma_y$ 对 $\ln t$ 的最佳逼近线($H = 0.5$)

逼近线的梯度就是 Hurst 指数, $H_x = \text{grad} \left(\frac{\ln\sigma_x}{\ln t} \right)$,

$H_y = \frac{\ln\sigma_y}{\ln t}$ 。在这次剪切分散测试中, $H = 0.5$, $D = 0.01$, $\Delta t = 10 \text{ min}$, $P = 1000$ 。

计算分析可知:当 $x = 1250, 1300, 1350$ 时, H_x 分别为0.5103, 0.3695, 0.2845, H_y 分别为1.1728, 1.3330, 1.6788;当 x 由1250升至1300, 1350时, H_y 持续增加, H_x 持续减小; y 方向存在一个明显的剪切分散, H_y 的平均梯度 $\bar{H}_y = 1 + H$ ($H = 0.5$);随着 H_y 的增加, H_x 在整个剪切带逐渐减小,而且由非线性剪切速度所产生的 H_y 可达到1.6788。

在相同的条件下,另一个非费克粒子云在同一点处被释放,此时 $H = 0.8$,测试结果见图6。计算分析可知,当 $x = 1250, 1300, 1350$ 时, H_x 分别为0.8132, 0.6466, 0.5089, H_y 分别为1.6160, 1.6205, 2.0646;随着 H_y 的增加, H_x 逐渐减小。这就再次证明了剪切分散发生在 y 方向上, $\bar{H}_y$ 约为 $1 + H$ ($H = 0.8$)。

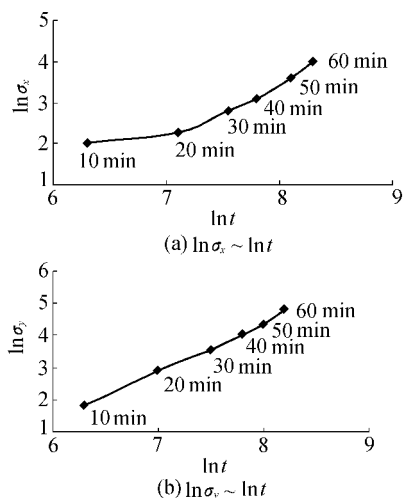


图6 海湾剪切区 $\ln\sigma_x$ 和 $\ln\sigma_y$ 对 $\ln t$ 的最佳逼近线($H = 0.8$)

5 结 语

采用 FBMNC 模型研究了沿海水域的布朗剪切分散以及 fBm 剪切分散,认为式(23)适用于所有不同 H 值的 fBm 剪切分散的情形。从对沿海湾模型的剪切流研究中发现,有大量的剪切分散发生在沿海湾入口处(主流区与回流区的交界处,主要集中在主流 y 方向)。从总的趋势看,随着 H_y 的增加, H_x 在整个剪切带逐渐减小; H_y 的平均值约为 $1 + H$;由非线性剪切速度所产生的 H_y 可达到1.6788。

自然沿海港湾的剪切分散相当复杂,大面积海洋表面湍流扩散的 Hurst 指数可以超过1^[19]。关于 fBm 粒子追踪模型以及加速的 fBm 粒子追踪模型及其在自然沿海水面上的应用可参见文献[3,12]。关

于 fBm 剪切分散的进一步研究方向包括大幅度增加粒子云数,以获得更精确的常系数 C 的值;把二维 fBm 模型推广到三维,从而模拟自然水域的简单剪切扩散,乃至复杂的剪切扩散,并把 fBm 粒子追踪模型从流体的分散推广到大气的分散。

参考文献：

[1] YVERGNIAUX P, CHOLLET J P. Particle trajectories modelling based on a lagrangian memory effect [C]//Hydraulics and the Environment. Ottawa :ASCE,1989.

[2] MANDELBROT B B. The fractals : form, chance and dimension[M] . San Francisco :Freeman,1977.

[3] QU B.The use of fractional brownian motion in the modelling of the dispersion of contaminants in fluids [D] . Edinburgh : Napier University,1999.

[4] MANDELBROT B B, van NESS J W. Fractional brownian motions, fractal noises and applications [J] . SIAM Review, 1968,10(4) :422-437.

[5] ADDISON P S. Fractal and chaos :an illustrated course [M] . Bristol,Philadelphia :Institute of Physics Publishing,1997.

[6] ADDISON P S,QU B. Modelling fractal diffusion on the ocean surface [C]//The 6th International Symposium on Flow Modelling and Turbulence Measurements. Tallahassee, Florida :Balkema,1996 :703-709.

[7] ADDISON P S,QU B. Non-Fickian random walk diffusion models[C]//Environmental and Coastal Hydraulics :Protecting the Aquatic Habitat. San Francisco :ASCE,1997 :45-50.

[8] ADDISON P S,QU B,NISBET A,et al. Non-Fickian,particle-tracking diffusion model based on fractional brownian motion [J] . International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1997,25 :1373-1384.

[9] ADDISON P S,QU B,NISBET A,et al. Modelling contaminant spread on the ocean surface and within soils using fBm's two

civil engineering applications [M] . London :Springer, 1997 : 375-382.

[10] ADDISON P S,QU B,NDUMU A S,et al. A particle tracking model for non-Fickian subsurface diffusion [J] . Mathematical Geology,1998,30(6) :695-716.

[11] ADDISON P S,QU B,PENDER G,et al. Coastal transport modelling using fractal geometry [C]//RESTON V A, MURAKAMI H,LUCO J E. Engineering Mechanics : A Force for the 21th ASCE Engineering Mechanics Conference. California :La Jolla,1998 :1673-1676.

[12] ADDISON P S, QU B, MEAD T C. Coastal dispersion modelling using an accelerated fBm particle tracking method [J] . Coastal Engineering Journal,2003,45(1) :139-158.

[13] OKUBO A. Oceanic diffusion diagrams [J] . Deep-Sea Research,1971,18 :789-802.

[14] FISCHER H B. Longitudinal dispersion and turbulent mixing in open-channel flow [J] . Ann Rev Fluid Mech,1973,5 :59-78.

[15] CHATWIN P C, ALLEN C M. Mathematical models of dispersion in rivers and estuaries [J] . Annual Review of Fluid Mechanics,1985,17 :119-149.

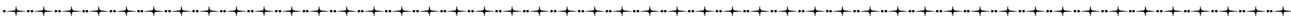
[16] TOWNSEND A A. The diffusion of heat spots in isotropic turbulence[C]//Proceedings of the Royal Society of London. Cambridge :Emmanuel College,1951 :418-430.

[17] FOISTER R T, van de VEN T G M. Diffusion of brownian motion particles in shear flows [J] . J Fluid Mech,1980,96(1) :105-132.

[18] COMPTE A. Continuous time random walks on moving fluids [J] . Physical Review E,1997,55(6) :6821-6831.

[19] SANDERSON B G, BOOTH D A. The fractal dimension of drifter trajectories and estimates of horizontal eddy-diffusivity [J] . Tellus,1991,43(A) :334-349.

(收稿日期 :2009-08-12 编辑 :骆超)



· 简讯 ·

第三届中国水利水电岩土力学与工程学术讨论会将在杨凌召开

由中国水利学会岩土工程专业委员会主办,西北农林科技大学、南京水利科学研究院、中国水利水电科学研究院、长安大学和西安理工大学承办,《岩土工程学报》编辑部、《岩石力学与工程学报》编辑部、《岩土力学》编辑部、陕西省岩石力学与工程学会、陕西省黄土力学与工程重点实验室协办的第三届中国水利水电岩土力学与工程学术讨论会将于 2010 年 9 月 18—19 日在陕西省杨凌国家高新农业示范区召开。大会将交流讨论水利水电岩土力学与工程的最新发展,探讨重大岩土工程关键技术问题。会议主题包括 :①特殊土(黄土、盐渍土、膨胀土、冻土)和岩石工程性质与测试技术 ;②岩土工程数值模拟理论与方法 ;③岩土工程原位试验与物理模拟 ;④地震作用下的岩土构筑物破坏机理与灾害控制 ;⑤大型水利水电工程中的岩土力学问题与环境保护 ;⑥环境岩土工程、地下工程、隧道工程、边坡工程、地基处理与桩基工程中的关键技术 ;⑦岩土体安全监测技术与预测预报方法 ;⑧重大工程实录。

(本刊编辑部供稿)