

混凝土断裂过程区拉伸软化的本构关系

何 敏¹,张东焕¹,王利民^{1,2},任 鹏¹

(1. 山东理工大学交通与车辆工程学院,山东 淄博 255049;2. 青岛理工大学理学院,山东 青岛 266033)

摘要:针对混凝土在裂纹端部的断裂过程区应力和变形具有软化特性这一情况,将该过程区抽象为具有黏聚应力分布的裂纹,通过确定黏聚裂纹张开位移和黏聚应力分布的计算式,将其应用于混凝土材料,得到该材料的黏聚裂纹张开位移的分布及张开位移与应力的本构关系。理论计算值与试验结果吻合良好。

关键词:混凝土;黏聚裂纹;张开位移;黏聚应力

中图分类号:TU31;TU528.1 文献标识码:A 文章编号:1006-7647(2010)04-0008-05

Constitutive relation for tension softening of concrete in fracture process zone//HE Min¹,ZHANG Dong-huan¹,WANG Li-min^{1,2},REN Peng¹(1. School of Transportation and Vehicle Engineering, Shandong University of Technology, Zibo 255049, China;2. Department of Science, Qingdao Technological University, Qingdao 266033, China)

Abstract:The stress and deformation of concrete have typical softening characteristics along the fracture process zone at the crack tip. The fracture process zone was regarded as a crack with distribution of cohesive stress. The formulae for the opening displacement of cohesive crack and the distribution of cohesive stress were determined and applied to concrete materials. The constitutive relation between the cohesive stress and crack opening displacement and the distribution of opening displacement were obtained. The calculated values agree with the experimental results.

Key words:concrete;cohesive crack;open displacement;cohesive stress

广泛应用于水工设施中的准脆性材料,如混凝土、岩石、陶瓷等,不同于金属类强化材料,当应力或应变达到一定数值后,其应力与变形的本构行为表现出具有软化特性^[1-2]。混凝土类材料的这种现象吸引了许多国内外学者的研究。最早有基于 Dugdal-Barenblatt 弹塑性断裂模型的 Hillerborg 虚拟裂纹模型^[3],之后有许多断裂分析模型,如双参数模型、等效裂纹模型、双 K 断裂模型和尺寸效应模型等^[4-8],都对该类材料的失效特性进行了深入研究和探讨。事实上,混凝土类材料的非线性断裂特性是与断裂过程区内微观与宏观裂纹的出现、材料颗粒与块体之间的相互作用密切相关的。在断裂过程区内,裂缝端部的一段不是完全张开的,存在一段模糊的裂纹带,即虚拟裂纹段,该裂纹带上的材料颗粒仍具有桥联作用,这种作用的综合量化表达就是阻止裂纹张开与扩展的所谓裂纹黏聚应力,它主要分布在裂缝端部的断裂过程区内。尽管在裂纹黏聚应力研究方面有许多研究成果^[9-11],但还需进一步深入研究。

1 黏聚裂纹模型

对于预制切口长度为 a_0 的楔入式劈裂试件,受到垂直于裂纹方向的拉力作用,裂纹的两端包括沿裂纹面方向长度均为 d 的断裂过程区。把该段视为裂纹的一部分,需要用分布的黏聚应力 $\sigma(x)$ 表示裂纹两岸材料之间的相互作用,除黏聚裂纹之外,材料基体均视为线弹性介质。以裂纹的左端点为原点,水平向右为横轴方向,建立如图 1 所示的坐标系。

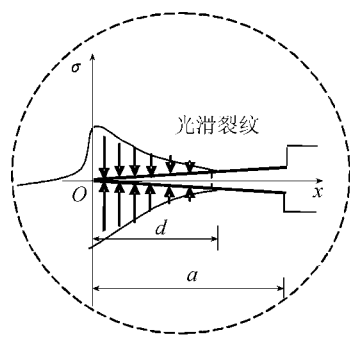


图 1 黏聚裂纹模型

若断裂过程区长度 d 远小于裂纹总长度,其问题能够简化为半无穷大裂纹的力学模型^[11]。考虑到张开位移在黏聚裂纹端点处为零,则断裂过程区任意一点 ξ 处的黏聚裂纹张开位移可采用如下的幂级数表示:

$$u(x) = \frac{4d}{E\pi} \sum_{n=1}^N a_n \left(\frac{\xi}{d} \right)^{n-\frac{1}{2}} = \frac{4d}{E\pi} \sum_{n=1}^N a_n x^{n-\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$$(0 \leq \xi \leq d, 0 \leq x \leq 1)$$

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{d}} K_I \tau_I(x) - \sum_{n=1}^N a_n \tau_n(x) \quad (2)$$

$$(0 \leq x \leq 1)$$

式中: E 为基体材料的杨氏弹性模量,在此仅考虑平面应力状态,若是平面应变状态需用 $E/(1-\nu^2)$ 代替公式中的 E ; ν 为基体材料的杨氏泊松比; a_n ($n = 1, 2, \dots, N$) 为待定参数,具有应力的量纲; σ 为黏聚应力 σ 的极限值; K_I 为仅有远场载荷作用时在裂纹端部产生的张开型应力强度因子; τ_n 为黏聚切应力^[11]。

从式 (2) 的形式上看,裂纹黏聚应力的分布仅与 d 和 K_I 以及 a_n 有关,而与材料参量无关。

事实上,裂纹的发展过程是一个不可逆的能量耗散过程,其黏聚应力在裂纹张开位移上所做的功产生断裂能。通过能量变分法^[12],同时考虑消除应力奇异性,文献 [11] 提出计算黏聚裂纹张开位移及黏聚应力分布解析分析方法。若取黏聚裂纹分布函数多项式 $N = 2$ 时,黏聚裂纹张开位移和黏聚应力的分布函数为

$$u(x) = \frac{4d}{E\pi} a_2 x^{\frac{3}{2}} \quad (3)$$

$$\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi d}} \frac{K_I}{\sqrt{1-x}} - \frac{3a_2}{2\pi\sqrt{1-x}} \left(x - \frac{1}{2} \right) \quad (4)$$

若取 $N = 3$,则黏聚裂纹张开位移和黏聚应力分布函数为

$$u(x) = \frac{4d}{E\pi} \sum_{n=1}^3 a_n x^{n-\frac{1}{2}} = \frac{4d}{E\pi} (a_2 x^{\frac{3}{2}} + a_3 x^{\frac{5}{2}}) \quad (5)$$

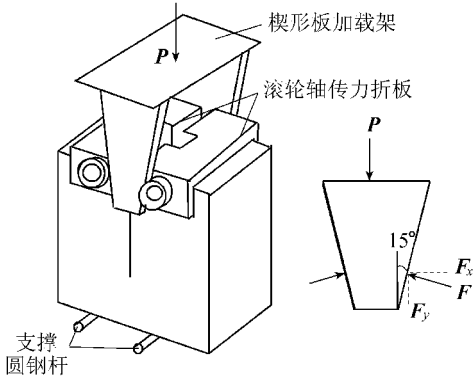
$$\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi d}} \frac{K_I}{\sqrt{1-x}} - \frac{3a_2}{2\pi\sqrt{1-x}} \left(x - \frac{1}{2} \right) + \frac{5a_3}{16\pi\sqrt{1-x}} (8x^2 - 4x - 1) \quad (6)$$

2 电测试验

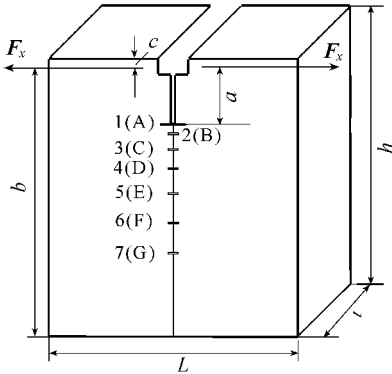
为了深入了解混凝土材料结构的断裂特性,本试验通过对楔入式劈裂试件进行应变片电测跟踪试验,得到试件在加载过程中预制裂缝端部变形或裂纹张开位移,以及损伤端点位置随载荷的变化曲线。

试验所用的水泥为山东省交通厅水泥厂生产的

42.5 号普通水泥,砂子是山东莱芜河滩砂,骨料为济南章丘双山青石子。混凝土试件的配合比为水泥:水:砂子:石子 = 1:0.35:1.67:1.93。试验装置及试件几何模型如图 2 所示。设 a 为加载点到裂纹尖端的距离, a_0 为 a 的初始值即预制裂纹长度, b 为加载点到试件韧带边沿的距离, c 为加载点到试件顶部的距离, h, L, t 分别为试件的总高度、宽度、厚度。其中, $a_0 = 120 \text{ mm}$, $b = 520 \text{ mm}$, $c = 40 \text{ mm}$, $t = 150 \text{ mm}$, $h = c + b = 560 \text{ mm}$, $L = 500 \text{ mm}$ 。如图 2(b) 所示,在试件两侧分别用悬空法粘贴 7 个应变片,其中一侧的自上而下编号为应变片 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; 另一侧的自上而下称为应变片 A, B, C, D, E, F, G。试验用应变仪为 YJ-4501 静态数字电阻应变仪。



(a) 试验装置



(b) 应变片粘贴位置

图 2 试验装置及试件几何模型

应变片采用中间悬空贴法,即只有应变片的两端粘贴在试件上。由应变仪记录的各个应变片的读数乘以应变片的长度,计算得到各个应变片两端的相对位移即黏聚裂纹的张开位移(COD)。裂纹的张开位移与载荷的关系曲线如图 3 所示。由图 3 可知,随着载荷的增大,各应变片处的张开位移也相应增加,在同一载荷下,越是接近预制裂纹的端部,其对应的张开位移越大。

材料的断裂总是经历裂纹起裂、扩展直至到达失稳断裂。当裂纹尖端的应力应变场达到裂纹开始扩展的临界状态时,裂纹的张开位移称为临界张开

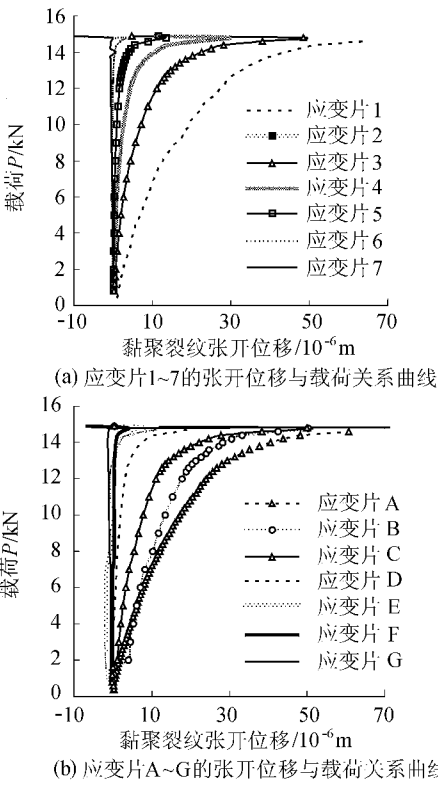


图3 载荷与裂纹张开位移关系曲线

位移。一般认为混凝土的张开位移在大于或等于 0.03 mm 时,便可以观测到裂纹的存在^[2]。若称与裂纹张开位移 0.03 mm 对应的应变为 ϵ_c ,其位置称为黏聚裂纹的端点,2 个相邻应变片在相同载荷下的张开位移,若一个张开位移对应的应变小于 ϵ_c ,另一个大于 ϵ_c ,则可以定出黏聚裂纹的端点在其中间。由 2 组应变计算得到的载荷与黏聚裂纹端点位置的关系曲线如图 4 所示。由图 4 可见,在加载的前一阶段,载荷大幅度增加而非线性裂纹端点缓慢扩展,在加载的后一阶段,却是载荷增长缓慢而黏聚裂纹端点位置显著移向试件边缘。

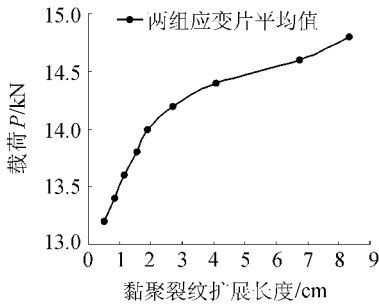


图4 裂纹扩展长度随载荷的变化曲线

表1 各载荷下的 K_I , N 和 C 值

组号	d/m	P/kN	$K_I / (MPa \cdot m^{1/2})$	$N = 2, C = 1$				$N = 3, C = 10$		
				a_2	a_3	a_4	a_2	a_3	a_4	a_5
①	0.015	13.8	1.203	16.417	1.026	4.104	17.164	-0.597	1.003	4.058
②	0.018	14.0	1.240	15.441	0.965	3.860	16.143	-0.561	0.943	3.816
③	0.022	14.2	1.283	14.459	0.904	3.615	15.116	-0.526	0.883	2.647

3 黏聚裂纹张开位移分布与软化区本构关系

根据图 4 取 3 组载荷 P 和 d 数据进行计算,其 P 和 d 的具体值列于表 1 中。根据文献^[13]计算得到各个载荷所对应的应力强度因子数值,也列于表 1 中。不失一般性,分别取 $N = 2$ 和 $N = 3$ 进行计算(表中 C 为常数)。

3.1 不同载荷下黏聚裂纹张开位移和黏聚应力分布
当 $N = 2$ 时, C 与张开位移和黏聚应力都没有关系,为简化计算,取 $C = 1$,根据文献^[11]提出的计算黏聚裂纹张开位移及黏聚应力分布解析分析方法,得到参量 a_n ($n = 2, 3, 4$) 的值列于表 1 中。当 $N = 3$ 时,为降低相对误差,调整 $C = 10$,将黏聚裂纹长度和应力强度因子的值代入式(7)计算,得到参量 a_n ($n = 2, 3, 4, 5$) 的值也列于表 1 中。 $E = 22 \text{ GPa}$,再将 a_n 代入式(5)中计算其张开位移,并与试验结果作比较,以距预制切口端部的距离为横轴、黏聚裂纹张开位移为纵轴作连续曲线图,并用离散点表示试验值,如图 5 所示。

通过以上 3 组载荷下的张开位移比较计算发现, N 取 2 或 3 时的理论计算值非常接近,并且均与试验结果相吻合。说明使用该理论方法计算裂纹张开位移是可行的。当 $N = 2$ 时就能使理论计算值与试验结果吻合良好;当 $N > 2$ 的时候,尽管调整 C 的值也能使其与试验结果吻合良好,但是增加了计算的繁杂性。

将各个 a_n , d 以及 K_I 的值代入式(6)计算得到相应载荷下的黏聚应力分布,当 $N = 2$ 和 $N = 3$ 时分别作图 6。通过图 6 中的黏聚应力与黏聚裂纹端点位置的关系曲线发现,在同一载荷下,靠近黏聚裂纹的端点黏聚应力较大,随着载荷的增加,同一位置处的黏聚应力减小,表明材料受损后的软化效应。

3.2 黏聚裂纹本构关系

当 $N = 2$ 时,得张开位移和黏聚应力之间的关系为

$$\sigma = \frac{2K_I^2}{\pi d} - \left(\frac{3EK_I^2}{4\pi d^2} u \right)^{\frac{2}{3}} \quad (7)$$

当 $N = 3$ 时,通过式(5)由位移 u 表示 x ,然后代入式(6)计算黏聚应力,从而可获得张开位移和黏聚

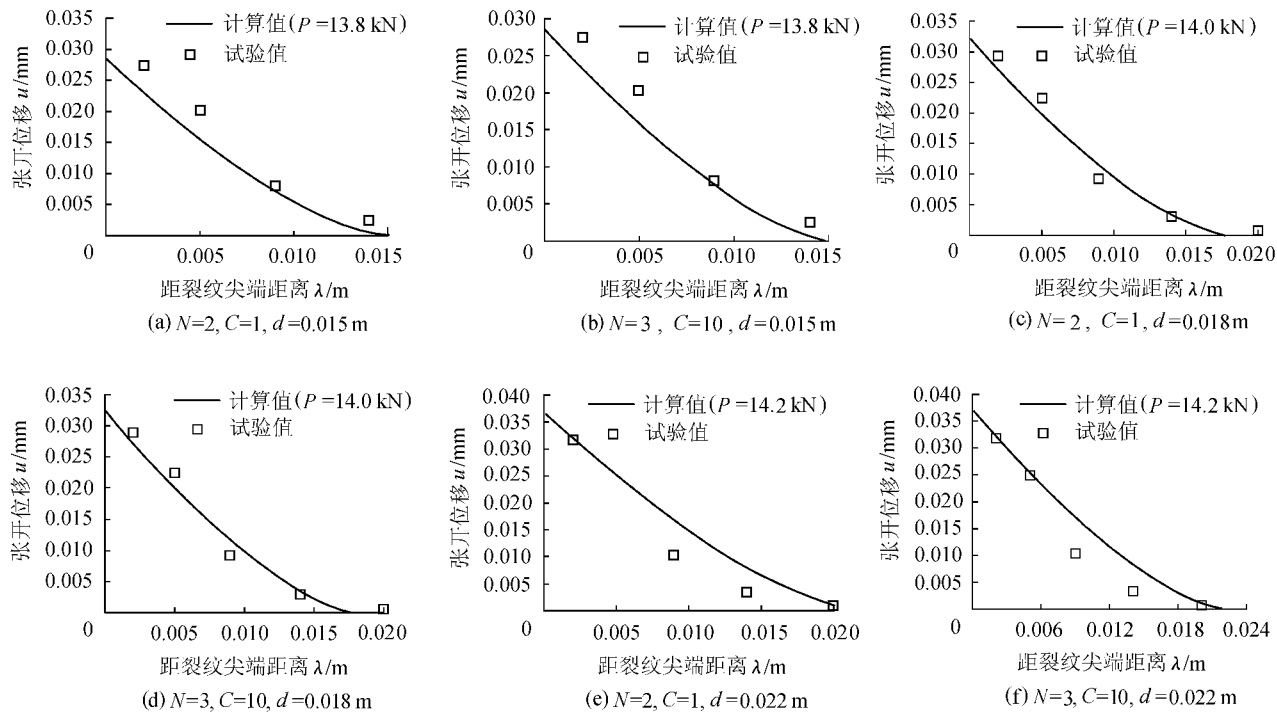


图5 不同载荷下黏聚裂纹的张开位移

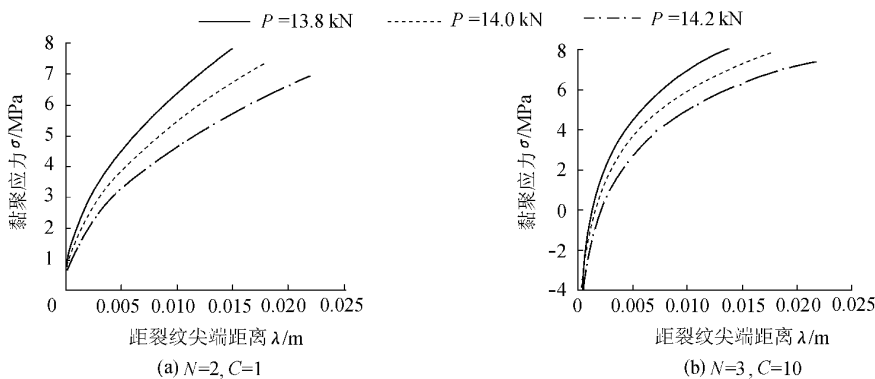


图6 $N=2$ 和 $N=3$ 时不同载荷下的黏聚裂纹张开位移和黏聚应力分布

应力的本构关系。根据式(1)和表1计算的3个载荷下的位移值,可得到相应载荷下的黏聚应力分布(图7)。图7中曲线显示,在 $u=0.013 mm$ 时,3个载荷下的黏聚应力值相交于 $\sigma=5 kN$ 左右。而且2个 N 值下的本构关系曲线形状类似、数值范围基本一致,同时可以看出应力与变形具有软化特性。

4 结 论

a. 通过混凝土黏聚裂纹模型分析,得到计算张开位移解析结果。经过比较发现, $N=2$ 时就能使解析方法与试验结果吻合良好;当 $N=3$ 时,调整参数 C 也能使计算结果与试验结果吻合良好,但是增加

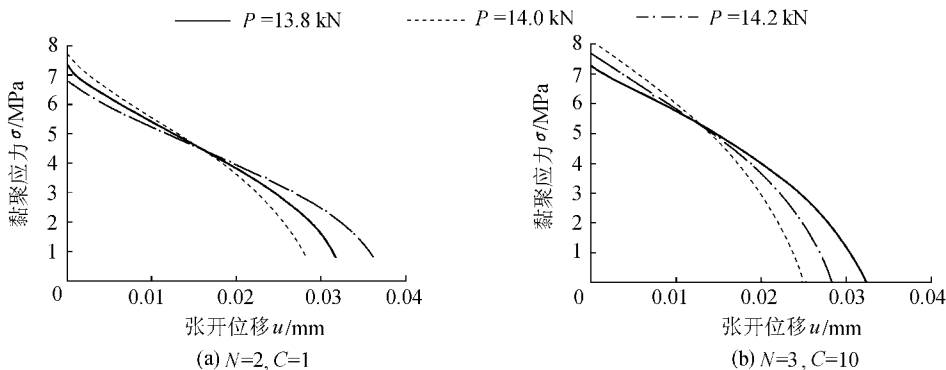


图7 $N=2$ 和 $N=3$ 时不同载荷下的黏聚裂纹本构关系

了计算的繁杂性。

b. 由黏聚张开位移分布与应力分布之间的对应关系,能够得到混凝土黏聚裂纹软化本构关系曲线。

参考文献：

[1] ISSA M A , CHUDNOVSKY A , ISIAM M S. Size effects in concrete fracture ,part I :experimental set up and observations [J]. International Journal of Fracture ,2000 ,102 (1) 1-24.

[2] 徐世昝 ,赵国藩.混凝土断裂力学研究[M]. 辽宁 :大连理工大学出版社 ,1991.

[3] HILLERBORG A ,MODEER M ,PETERSSON P E. Analysis of crack formarion and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite element[J]. Cement and Concrete Research ,1976 ,6 (6) :773-782.

[4] JENQ Y S ,SHAH S P. Two parameters fracture model for concrete[J]. Journal Engineering Mechanical ,ASCE ,1985 ,111(10) 1227-1241.

[5] KARLHALOO B L ,NALLATHAMBI P. Effective crack model for the determination of fracture toughness of concrete[J].

Engineering Fracture Mechanics ,1990 ,35 (4/5) 637-645.

[6] XU Shi-lang ,REINHARDT H W. Determination of double-K criterion for crack propagation in quasi-brittle fracture[J]. International Journal of Fracture ,1999 ,98 (2) :111-193.

[7] BAZANT Z P ,CHEN Er-ping. Scaling of structural failure[J]. Applied Mechanics Review ,1997 ,50 (10) 593-627.

[8] 王宝庭 ,张廷毅 ,高丹盈.混凝土断裂能产生尺寸效应的原因探讨[J]. 水利水电科技进展 ,2008 ,28 (6) 9-11.

[9] KITSUTAKA Y. Fracture parameters by polylinear tension softening analysis[J]. Journal of Enginering Mechanics , ASCE ,1997 ,125 (5) 444-449.

[10] WANG Wei , CHENG T T H , DENIS B. Generalized formulation for strip yielding model with variable cohesion and its analytical solutions[J]. International Journal of Solids and Structures ,2000 ,37 :7533-7546.

[11] 王利民 ,徐世昝 ,赵熙强.考虑软化效应的黏聚裂纹张开位移分析[J]. 中国科学 :G 辑 ,2006 ,36 (1) 59-71.

[12] 钱伟长.变分法及有限元[M]. 北京 :科学出版社 ,1980.

[13] TADA H ,PARIS P C ,IRWIN G R. The stress analysis of cracks handbook[M]. New York : ASME Press ,2000 61-63.

(收稿日期 :2009-10-20 编辑 :方宇彤)

(上接第 3 页)

参考文献：

[1] 邹进 ,刘可真.水资源系统运行与优化调度[M]. 北京 :冶金工业出版社 ,2006.

[2] CHANG G ,AGANAGIC M ,WRIGHT J ,et al. Experiences with mixed integer linear programming based approaches on short-term hydro scheduling[J]. IEEE Transactions on Power Systems ,2001 ,16 (4) :743-749.

[3] ARNOLD E , TATJEWSKI O , WOLOCHOWICZ P. Two methods for large-scale nonlinear optimization and their comparison on a case study of hydropower optimization[J]. Journal of Optimisation Theory Applications , 1994 ,81 (2) : 221-248.

[4] 王金文 ,袁晓辉 ,张勇传.随机动态规划在三峡梯级长期发电优化调度中的应用[J]. 电力自动化设备 ,2002 ,22 (8) 54-56.

[5] LAMOND B F. Stochastic optimization of a hydroelectric reservoir using piecewise polynomial approximations[J]. INFOR ,2003 ,41 (1) 51-69.

[6] 宗航 ,周建中 ,张勇传. POA 改进算法在梯级电站优化调度中的研究与应用[J]. 计算机工程 ,2003 ,29 (17) :105-109.

[7] 罗强 ,宋朝红 ,雷声隆.水库群系统非线性网络流规划法[J]. 武汉大学学报 :工学版 ,2001 ,34 (3) 22-26.

[8] 张铭 ,丁毅 ,袁晓辉 ,等.梯级水电站水库群联合发电优

化调度[J]. 华中科技大学学报 :自然科学版 ,2006 ,34 (6) 90-92.

[9] 左幸 ,马光文 ,过夏明.三角旋回算法求解梯级电站群短期优化调度[J]. 电力系统自动化 ,2006 ,30 (13) :28-32.

[10] 徐刚 ,马光文.基于蚁群算法的梯级水电站群优化调度[J]. 水力发电学报 ,2005 ,24 (5) 7-10.

[11] 马光文 ,王黎.水电站群优化调度的 FP 遗传算法[J]. 水力发电学报 ,1996 ,55 (4) 21-29.

[12] LIANG R H ,HSU Y Y. Scheduling of hydroelectric generations using artificial neural networks[J]. IEE Proc Gener Transm Distrib ,1994 ,141 (5) 452-458.

[13] 邹进 ,李承军.三峡梯级电站的模糊优化调度方法[J]. 水电自动化与大坝监测 ,2002 ,26 (3) 56-59.

[14] 练继建 ,马超 ,张卓.基于改进蚂蚁算法的梯级水电站短期优化调度[J]. 天津大学学报 ,2006 ,39 (3) 264-268.

[15] 王文川 ,程春田 ,徐冬梅.基于混沌遗传算法的水电站优化调度模型及应用[J]. 水力发电学报 ,2007 ,26 (6) 7-11.

[16] 王金文 ,石琦 ,伍永刚 ,等.水电系统长期发电优化调度模型及其求解[J]. 电力系统自动化 ,2006 ,26 (24) :22-30.

[17] 吴杰康 ,辛保江 ,李杰科.梯级电站联合发电模型(上):水能发电量计算方法探讨[J]. 水利水电科技进展 ,2010 ,30 (3) 1-4.

(收稿日期 :2009-10-28 编辑 :方宇彤)