

DOI :10.3880/j.issn.1006-7647.2010.05.019

沉降预测广义 Usher 模型参数确定的优化算法

许小健¹, 干 洪², 张金轮²

(1. 芜湖市勘察测绘设计研究院, 安徽 芜湖 241000; 2. 安徽工程科技学院, 安徽 芜湖 241000)

摘要:为提高软土路基沉降预测精度,将用于资源预测的广义 Usher 模型引入软土路基沉降预测中,基于最小二乘原理,利用差分进化算法优化求解模型结构参数。分析表明,广义 Usher 模型包含了目前用于沉降预测的指数曲线模型、Logistic 模型、Gompertz 模型、Bertalanffy 模型、Weibull 模型、Usher 模型共 6 种沉降预测模型,该模型具有更强大的可塑性和适应性。实例计算结果表明,经差分进化算法优化的广义 Usher 模型用于沉降预测效果良好,比 Logistic 模型、Gompertz 模型、Bertalanffy 模型、Usher 模型这几种沉降预测模型具有更高的预测精度,可供工程应用参考。

关键词:岩土工程;软土路基;沉降预测;广义 Usher 模型;参数优化;差分进化算法

中图分类号: TU433; TU477 **文献标识码:** B **文章编号:** 1006-7647(2010)05-0073-04

Optimization algorithms for parameters of generalized Usher model of settlement prediction // XU Xiao-jian¹, GAN Hong², ZHANG Jin-lun² (1. Wuhu Geotechnical and Survey Design Institute, Wuhu 241000, China; 2. Anhui University of Technology and Science, Wuhu 241000, China)

Abstract: To improve the prediction accuracy of settlement of soft clay roadbed, the generalized Usher model originally for resources forecast was introduced in the settlement prediction. Based on the least square principle, the differential evolution algorithms were employed to solve the structural parameters of the model. The generalized Usher model includes the current six kinds of models for settlement prediction: the exponential curve model, the Logistic model, the Gompertz model, the Bertalanffy model, the Weibull model and the Usher model, indicating that it has more powerful flexibility and adaptability. The calculated results of examples show that the generalized Usher model optimized by the differential evolution algorithms has high prediction accuracy and can be applied in actual projects.

Key words: geotechnical engineering; soft clay roadbed; settlement prediction; generalized Usher model; parameter optimization; differential evolution algorithm

随着软土地区铁路和高速公路的大力发展,软土路基的沉降问题日益突出^[1]。有关路基沉降的研究已有相当多的报道,其中沉降预测问题一直是众多研究者广泛关注的问题。现有的沉降预测方法主要有两大类:一是根据固结理论基于土的本构模型,应用数值方法计算沉降量;二是根据实测资料推算沉降量与时间关系的预测方法。由于路基沉降影响因素的复杂性及本构模型参数选取困难等问题,基于固结理论的沉降计算值往往与实测值差异较大。因此,如何从前期的沉降数据来推算软土路基后期的沉降规律,这方面的研究工作具有重要意义。在第 2 类方法中,长期以来,常用的方法有双曲线法^[2]、修正双曲线法^[3]、指数曲线法^[2]、Asaoka 法^[4]、灰色预测法^[4]、星野法^[5]等。

近来,有关研究结果表明,线性加载过程中,软土路基的沉降可以分为 4 个阶段^[6]:沉降量线性增长阶段—沉降速率不断增加阶段—沉降速率递减阶段—沉降趋于稳定阶段,即软土路基沉降发展过程呈 S 形曲线。Logistic 曲线的形状也呈 S 形,与沉降曲线特点极为一致,因此被用来描述沉降的发生发展过程,从而在沉降的预测中得到了应用^[7]。除此之外,具有饱和增长趋势的 S 形曲线如 Gompertz 曲线模型^[8]、Weibull 曲线模型^[9]、Usher 曲线模型^[10]等几种经验曲线模型也逐渐得到应用,取得了良好的效果。然而上述几种 S 形曲线模型在模型结构上仍然存在一些不足。针对这一缺点,笔者将用于资源预测的广义 Usher 模型^[11]引入沉降预测中,通过对广义 Usher 模型的分析,表明了 Logistic 模型、

基金项目:芜湖市科技计划资助项目(2008702)
作者简介:许小健(1984—),男,安徽芜湖人,助理工程师,硕士,从事数值优化算法及岩土工程应用研究。E-mail: xuxiaojian@foxmail.com

Bertalanffy 模型、Gompertz 曲线模型^[8]、Weibull 曲线模型^[9]、Usher 曲线模型^[10]均为广义 Usher 模型的几种特例,因此,广义 Usher 模型具有更强的适应性;同时,鉴于合理的优化方法可以进一步改善模型的预测精度,本文选用笔者研发的基于并行优选策略的差分进化算法^[12](DEPES 算法)来优化模型结构参数。实例计算结果显示,本文给出的模型及参数优化方法有效,可取得满意的结果。

1 软土路基沉降预测的广义 Usher 模型

用于资源预测的广义 Usher 模型是以 Usher 模型为基础拓展建立起的一个新的生长曲线模型。其建立的微分表达式为^[11]

$$\frac{dy}{dt} = \frac{r}{\beta} t^{\alpha} y \left[1 - \left(\frac{y}{L} \right)^{\beta} \right] \quad (1)$$

式中: t 为时间变量; α 为时间 t 的修正因子; y 为被描述事物的特征指标; r 为增长速度因子,正实数; β 为形状因子; L 为 y 的上限。

对式(1)进行分离变量求解,得通解为

$$y = \frac{L}{\left[1 + c_2 L^{\beta} \exp\left(-\frac{rt^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) \right]^{\frac{1}{\beta}}} \quad (2)$$

式(2)即为广义 Usher 模型。考虑到该式繁琐,可简化之。令 $c_2 L^{\beta} = a$, $\frac{r}{\alpha+1} = b$, $\alpha+1 = c$, $\frac{1}{\beta} = d$;同时,为了表达成沉降预测模型形式,令 $y = s$, $L = s_{\infty}$,则有沉降预测的广义 Usher 模型为

$$s = \frac{s_{\infty}}{[1 + a \exp(-bt^c)]^d} \quad (3)$$

式中: s 为沉降量; s_{∞} 为极限沉降量。

分析可知,在式(3)中,若令 $c = 1$, $a = d = -1$,该模型可简化为指数曲线沉降预测模型;令 $c = 1$,该模型可简化为 Usher 沉降预测模型;若令 $a = -1$, $c = 1$, $d = -3$,该模型可简化为 Bertalanffy 沉降预测模型;若令 $c = d = 1$,该模型可简化为 Logistic 沉降预测模型;若令 $a = d = -1$,该模型可简化为 Weibull 沉降预测模型;若令微分表达式(1)中 $\alpha = 0$, $\beta \rightarrow 1$,由式(1)经罗必塔法则求导后可得 Gompertz 模型的微分表达式,从而可以得到 Gompertz 沉降预测模型。由此可见,沉降预测的指数曲线模型、Bertalanffy 曲线模型、Logistic 曲线模型、Weibull 曲线模型、Gompertz 曲线模型、Usher 曲线模型均为广义 Usher 模型的几种特例,通过选取不同的模型参数,广义 Usher 模型可以将现有的几个沉降预测模型统一起来。因此,广义 Usher 模型具有更强的适应性,能够更好地拟合实测数据。

2 模型参数确定的改进差分进化算法

设一般非线性模型参数优化问题为

$$\min J = \sum_{l=1}^m \left\| f(c_1, c_2, \dots, c_D, U_l) - V_l \right\|^q \quad (4)$$

式中: J 为优化准则系数; f 为非线性系数模型输出值; $c_1, c_2, \dots, c_D$ 为 D 个模型参数; U_l, V_l 为 m 对输入、输出观测数据; q 为任意实常数,工程上一般取 $q = 2$,即为通用的最小二乘法准则。

由于式(4)是一个非线性函数,因此该问题的参数确定是一个非线性参数的确定问题。可以采用许多方法,如高斯-牛顿或麦夸特法等,但这些传统的算法都对输入的模型参数初始值有一定的要求,若输入的参数值与参数的真实值偏离较大,可能造成迭代不收敛,而且也很难得到全局优化解。而进化算法如遗传算法^[13]是目前处理一般非线性数学模型优化的一种新的优秀算法,它对模型是否线性、连续、可微等没有限制,也不受优化变量数目、约束条件的束缚,直接在优化准则函数(目标函数)的引导下进行全局自适应寻优,该方法直观、简便、通用、适应性强。因此可以用进化算法进行搜索,从而确定模型结构参数。

差分进化算法(DE 算法)是 Storn 等^[14]于 1995 年提出的一种较为简单、有效的进化算法。由于其原理简单,受控参数少,易于理解和实现,实施随机、并行、直接的全局搜索,已成为进化算法的一个重要分支。目前,DE 算法已在优化应用方面取得了良好的效果^[15]。考虑到已有较多文献研究证明 DE 算法优化性能优于遗传算法,这里采用笔者改进研发的 DEPES 算法来进行优化求解。下面给出 DEPES 算法求解沉降预测广义 Usher 模型的步骤^[12]:

步骤 1 构建目标函数 根据式(3)和式(4),由 m 对实测沉降观测数据 $\{t_l, s_l\}$ 可构建待优化目标函数(累计残差平方和)如下:

$$\begin{cases} \min J(X) = \sum_{l=1}^m (\hat{s}_l - s_l)^2 \\ \text{s.t.} & g_1 = s_{\infty} > s_{\text{latest}} \\ & g_2 = 1 + a \exp(-bt^c) > 0 \\ & g_3 = [(1 + a \exp(-bt^c))]^d > 0 \end{cases} \quad (5)$$

式中, X 为列向量, $X = [s_{\infty}, a, b, c, d]^T$; $\hat{s}_l$ 为根据式(3)得出的沉降量计算值; g_1 为考虑极限沉降量 s_{∞} 大于最后一次沉降观测值 s_{latest} 而设置的约束; g_2, g_3 为使式(5)目标函数式有意义而设的约束。以上约束采用罚函数法进行处理。

步骤 2 初始化种群 置当前进化代数 $G \leftarrow 1$,

利用预设的算法控制参数(种群中个体数量 N_p 、交叉概率 C_r 、最大进化代数 G_{max} 、变量维数 D)在变量下上限范围 $[X^L, X^U]$ 内(问题可行域)随机初始化种群个体 $X_{i,G}$ ($i = 1, 2, \dots, N_p$)。

步骤3 种群评价:将种群个体代入式(5)计算出目标函数值,以确定最优目标函数值 V_{bf} 和相应的最优个体 X_{best} 。

步骤4 参数调整:随机产生差分进化模式集合 $DE/x/y/z$ (x 表示在变异操作时,是随机选取当前代中某一个体 $X_{rand,G}$ 作为父个体还是选择当前代中最优个体作为父个体 $X_{best,G}$; y 表示在变异操作时,所使用差分个体的个数; z 表示交叉方案),作为第 G 代的差分进化模式,并在 $[0.2, 0.9]$ 范围内随机动态调整当前代的缩放因子 F_G 。

步骤5 变异操作:对每个目标个体 $X_{i,G}$ 按步骤4确定的进化模式变异得到扰动个体 $V_{i,G+1}$ 。

步骤6 交叉操作:根据 $X_{i,G}$ 和 $V_{i,G+1}$ 按步骤4确定的相应进化模式交叉,生成新的试验个体 $U_{i,G+1}$ 。

步骤7 并行试验搜索:按式(6)产生新的试验个体 $Y_{i,G+1}$:

$$\begin{cases} Y_{i,G+1} = X_{best,G} + \sigma_{i,G} \times N(0,1) \\ \sigma_{i,G+1} = \sigma_{\epsilon} + \sigma_{i,0} \times \exp(-AG/G_{max}) \end{cases} \quad (6)$$

式中: $X_{best,G}$ 为第 G 代的最优秀个体; $\sigma_{i,G}$ 、 $\sigma_{i,G+1}$ 分别为父代、子代个体的标准差; σ_{ϵ} 、 $\sigma_{i,0}$ 分别为标准差基数和初始标准差,应用中常取 $\sigma_{\epsilon} = 0$, $\sigma_{i,0} \in [1, 3]$; 随机实数 $A \in [1, 10]$; $N(0, 1)$ 为服从标准正态

分布的随机数。

步骤8 变量边界约束处理:对不符合变量边界约束的新个体 $U_{i,G+1}$, $Y_{i,G+1}$, $X_{i,G}$ 用在可行域内产生的随机个体来代替。

步骤9 选择操作:将 $U_{i,G+1}$, $Y_{i,G+1}$, $X_{i,G}$ 所对应的目标函数值进行比较,保留优秀解,更新 V_{bf} 和 X_{best} ,置 $G \leftarrow G + 1$ 。

步骤10 判断是否收敛:若是,则结束算法,输出结果;否则,转入步骤4,直至满足收敛条件。

基于上述步骤,在 Matlab 软件环境中编制了相应的计算程序。下面结合实际工程的沉降观测数据,将 DEPES 算法应用于计算分析中。

3 工程实例计算分析

3.1 实例计算

为便于比较几种常用预测模型的拟合预测情况,选用文献[10]中的实例为例,即宁杭高速公路工程。其 NH 标 k95 + 520 观测点的沉降观测资料如表1所示。沉降观测从2002年8月19日至12月14日止。现同样以该处沉降观测资料前80d的沉降观测数据作为计算模拟值,用本文的广义 Usher 模型及 DEPES 算法对沉降数据进行模拟和预测。经编程并在计算机上实现,DEPES 算法的参数设置为 $N_p = 50$, $C_r = 0.5$, $G_{max} = 1\,000$, $V_f = 10^{-6}$ 。利用 DEPES 算法进行若干次随机试验搜索,取最好的一组结果为 $s_{\infty} = 12.346$, $a = 338.381$, $b = 8.905\,29$, $c = 0.106\,501$, $d = 871.744$ 。即广义 Usher 模型为

表1 实测数据与各模型计算数据值的比较

t /d	观测值/ cm	Logistic 模型		Gompertz 模型		Bertalanffy 模型		Usher 模型		广义 Usher 模型	
		计算值/ cm	相对 误差/%	计算值/ cm	相对 误差/%	计算值/ cm	相对 误差/%	计算值/ cm	相对 误差/%	计算值/ cm	相对 误差/%
30	5.35	4.945	-7.561	4.716	-11.844	4.892	-8.561	5.273	-1.442	5.438	1.643
34	5.88	5.788	-1.557	5.329	-9.361	5.489	-6.650	5.974	1.592	6.188	5.245
35	6.56	5.996	-8.593	5.479	-16.486	5.633	-14.131	6.148	-6.288	6.359	-3.070
40	7.48	6.987	-6.591	6.190	-17.240	6.310	-15.642	6.990	-6.553	7.117	-4.849
45	7.82	7.853	0.419	6.839	-12.567	6.920	-11.509	7.755	-0.830	7.745	-0.964
48	8.05	8.297	3.070	7.195	-10.626	7.254	-9.888	8.164	1.415	8.069	0.236
50	8.38	8.561	2.155	7.418	-11.484	7.463	-10.943	8.413	0.394	8.267	-1.353
55	8.59	9.108	6.036	7.926	-7.734	7.940	-7.567	8.951	4.208	8.705	1.334
60	8.84	9.515	7.634	8.366	-5.367	8.357	-5.464	9.374	6.043	9.075	2.660
62	9.01	9.644	7.034	8.524	-5.400	8.508	-5.572	9.514	5.592	9.207	2.192
65	9.18	9.807	6.828	8.742	-4.768	8.718	-5.033	9.695	5.613	9.391	2.300
70	9.81	10.012	2.057	9.062	-7.620	9.029	-7.961	9.933	1.253	9.663	-1.501
75	10.04	10.153	1.130	9.331	-7.057	9.298	-7.390	10.105	0.651	9.898	-1.416
76	10.06	10.176	1.152	9.380	-6.761	9.346	-7.097	10.134	0.731	9.941	-1.183
80	10.11	10.250	1.387	9.557	-5.470	9.527	-5.767	10.229	1.176	10.103	-0.073
85		10.316		9.745		9.722		10.316		10.282	
90		10.360		9.901		9.889		10.378		10.441	
91		10.367		9.929		9.919		10.388		10.470	
100		10.410		10.137		10.150		10.451		10.706	

注:表中观测数据及 Logistic 模型、Gompertz 模型、Bertalanffy 模型、Usher 模型数据均来源于文献[10]。

$$\hat{s} = \frac{12.346}{[1 + 338.381 \exp(-8.90529t^{0.106501})]^{871.744}} \quad (7)$$

根据式(7)可计算出30~100 d的沉降模拟值和预测值,及相对误差对比情况,如表1所示,得出的沉降与时间关系曲线如图1所示。

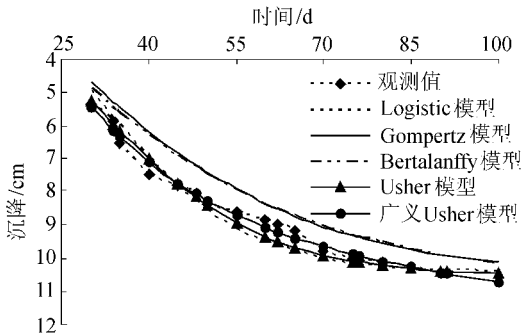


图1 实测曲线与各模型计算曲线的比较

3.2 讨论分析

为提高预测的精度,首先要保证有充分高的模拟精度,尤其是 $t=80\text{ d}$ 时的模拟精度。从表1可见,广义 Usher 模型在 $t=80\text{ d}$ 时的沉降模拟值为 10.103 cm ,与观测值 10.11 cm 非常接近,相对误差的绝对值仅为 0.073% ,均小于表中所列其他模型相对误差绝对值;再从 $30\sim80\text{ d}$ 的整体沉降模拟情况来看,本文方法使平均绝对值相对误差较小(2.001%),也均小于其他模型平均绝对值相对误差。表2为各模型评价指标,表2中,无论是从相关指数还是从累计残差平方和等评价指标来看,广义 Usher 模型的模拟和预测效果都是最佳的。以上分析表明,广义 Usher 模型能更好地适应实际情况的变化,可以获得很高的拟合精度,其推算的结果是可靠的。

表2 各模型评价指标

评价指标	平均绝对值相对误差/%	累计残差平方和/ cm^{-2}	相关指数
Logistic 模型	4.214	2.434	0.972 303
Gompertz 模型	9.319	9.081	0.890 701
Bertalanffy 模型	8.612	8.007	0.893 369
Usher 模型	2.919	1.417	0.981 715
广义 Usher 模型	2.001	0.501	0.991 956

对于 DEPES 算法和 DE 算法的优化搜索性能比较,图2、图3绘出了该次算法试验搜索的进化过程曲线。图中纵坐标采用对数坐标。由图2可见,当各算法在处理如本文这一含有多变量、带约束的较复杂非线性优化模型时,DE 算法表现欠佳,而 DEPES 算法较为理想,DEPES 算法所对应的最优目标函数值下降曲线比 DE 算法的下降曲线具有更快的下降速度和更好的下降程度。这说明 DEPES 算法比 DE 算法具有更快的收敛速度和更好的收敛精

度。为便于观察各算法前期进化搜索情况,结合图2,从图3绘出的算法前200代进化过程曲线可见,DEPES 算法大约在120代左右就可以收敛到问题的满意解,而 DE 算法却在给定的进化代数1000代内仍未能收敛至 DEPES 算法的计算结果。综上所述,DEPES 算法可快速收敛至高精度解,是 DE 算法的一种有效改进算法。

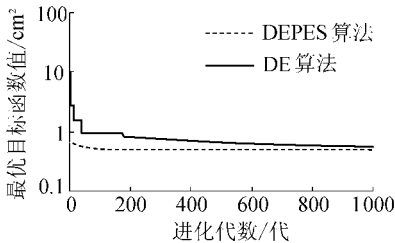


图2 各算法整体搜索过程的进化曲线

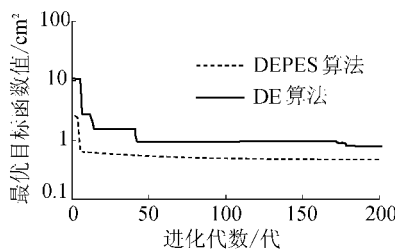


图3 各算法进化200代的进化曲线

4 结 论

a. 通过对软土路基沉降预测广义 Usher 模型分析,常用的指数曲线模型、Logistic 模型、Gompertz 模型、Bertalanffy 模型、Weibull 模型、Usher 模型等6种沉降预测模型均为其特例,该模型具有更强大的可塑性和适应性,可获得较其他模型更高精度的沉降模拟预测值。

b. 给出了沉降预测广义 Usher 模型参数优化求解的改进差分进化算法,该算法具有计算速度快、自动化程度高、通用性强等特点,是一种有效的智能优化算法,适用于非线性优化问题的数值优化求解,可在其他岩土工程非线性优化问题中推广应用。

参考文献:

- [1] 吴钰,徐泽中,陈景扬.不同方法估算路基最终沉降量的分析研究[J].水利水电科技进展,1998,18(2):17-21.
- [2] 王伟,宰金珉,卢延浩.软土工后沉降双曲线模型与指数曲线模型分析[J].江苏大学学报:自然科学版,2008,29(2):173-176.
- [3] 冯文凯,刘汉超.修正双曲线法在路基沉降变形初期阶段的应用探讨[J].地质灾害与环境保护,2001,12(3):61-63.

(下转第84页)

porosity on unstructured grids[J]. Int J Numer Methods in Fluids ,2006 ,50 309-345.

[89] JENNY P , MULLER B. Rankine-hugoniot-riemann solver considering source terms and multidimensional effects[J]. J Comput Phys ,1998 ,145 575-610.

[90] SMOLARKIEWICZ P K ,MARGOLIN L G. MPDATA :a finite-difference solver for geophysical flows[J]. J Comput Phys , 1998 ,140 459-480.

[91] GREENBERG J M ,LEROUX A Y. A well-balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations[J]. SIAM Numer Anal ,1996 33(1) :1-16.

[92] Le VEQUE R J. Balancing source terms and flux gradients in high-resolution Godunov methods : the quasi-steady wave-propagation algorithm[J]. J Comput Phys , 1998 ,146(1) : 346-365.

[93] 王志力 , 耿艳芬 , 金生. 具有复杂计算域和地形的二维浅水流动数值模拟[J]. 水利学报 ,2005 36(4) :1-9.

[94] HUBBART M E ,GARCIA N P. Flux Difference Splitting and the Balancing of Source Terms and Flux Gradients[J]. J Comput Phys ,2000 ,165 89-125.

[95] TOMAS CR ,NIETO F ,MACARENA G M. A flux-splitting solver for shallow water equations with source terms[J]. Int J Numer Methods in Fluids ,2003 42 23-55.

[96] MOHAMMADIAN A , ROUX D Y L. Simulation of shallow flows over variable topographies using unstructured grid[J]. Int J Numer Methods in Fluids ,2006 ,52 473-498.

[97] ZHOU J G ,CAUSON D M ,MINGHAM C G ,et al. The surface gradient method for the treatment of source terms in the shallow-water equations[J]. J Comput Phys ,2001 ,168 1-25.

[98] HUI W H ,PAN Cun-hong. Water level-bottom topography formulation for the shallow-water flow with application to the tidal bores on the Qiantang river[J]. Computational Fluid Dynamics Journal ,2003 ,12(3) 549-554.

[99] AUDUSSE E ,BRISTEAU M O. A well-balanced positivity preserving" second-order " scheme for shallow water flows on unstructured meshes[J]. J Comput Phys ,2005 206 311-333.

[100] PAN Cun-hong , DAI Shi-qiang , CHEN Sen-mei. Numerical simulation for 2D shallow water equations by using Godunov-type scheme with unstructured mesh [J]. Journal of Hydrodynamics : Ser B ,2006 ,18(4) 475-480.

[101] 于守兵. 计算二维浅水方程中静水压力项与底坡项的积分平衡法[J]. 水利水电科技进展 ,2009 ,29(4) :32-35.

[102] 刘刚 , 金生. 基于修正 Roe 格式的有限体积法求解二维浅水方程[J]. 水利水运工程学报 ,2009(3) 29-33.

[103] 王昆 , 金生 , 冯志强 , 等. 基于和谐性离散格式求解带源项的二维浅水方程[J]. 水动力学研究与进展 :A 辑 , 2009 24(5) 535-546.

[104] SLEIGH P A , GASKELL P H , BERZINS M , et al. An unstructured finite-volume algorithm for predicting flow in rivers and estuaries[J]. Computers & Fluids ,1998 ,27(4) : 479-508.

[105] BRUFAU P , VAZQUEZ-CENDON M E , GARCA-NAVARRO P. A numerical model for the flooding and drying of irregular domain[J]. Int J Numer Meth Fluids ,2002 39 247-275.

[106] BRUFAU P , GARCA-NAVARRO P , VAZQUEZ-CENDON M E. Zero mass error using unsteady wetting-drying conditions in shallow flows over dry irregular topography[J]. Int J Numer Meth Fluids ,2004 45 :1047-1082.

[107] 潘存鸿 , 林炳尧 , 毛献忠. 浅水问题动边界数值模拟 [J]. 水利水运工程学报 ,2004(4) :1-7.

[108] 潘存鸿 , 于普兵 , 鲁海燕. 浅水动边界的干底 Riemann 解模拟[J]. 水动力学研究与进展 :A 辑 ,2009 ,24(3) : 305-312.

(收稿日期 2009-11-20 编辑 :高建群)

(上接第 76 页)

[4] 张仪萍 , 俞亚南 , 张士乔 , 等. 沉降预测中的灰色模型理论与 Asaoka 法[J]. 系统工程理论与实践 ,2002(9) :141-144.

[5] 方宝. 星野法在某软基段沉降预测中的应用[J]. 科技创新导报 ,2009(17) 53-54.

[6] 梅国雄 , 宰金珉 , 殷宗泽 , 等. 沉降 ~ 时间曲线呈 S 形的证明及其应用 :从一维固结理论角度[J]. 岩土力学 , 2004 25(1) 20-22.

[7] 朱志铎 , 周礼红. 软土路基全过程沉降预测的 Logistic 模型应用研究[J]. 岩土工程学报 ,2009 31(6) :965-969.

[8] 余闯 , 刘松玉. 路堤沉降预测的 Gompertz 模型应用研究 [J]. 岩土力学 ,2005 ,26(1) :82-86.

[9] 王伟 , 卢廷浩. 基于 Weibull 曲线的软基沉降预测模型分析[J]. 岩土力学 ,2007 28(4) :803-806.

[10] 赵明华 , 龙照 , 邹新军. 路基沉降预测的 Usher 模型应用研究[J]. 岩土力学 ,2008 29(11) :2973-2976.

[11] 李社文. 广义 Usher 模型的建立及其在油田生产中的应用[J]. 新疆石油地质 ,2001 22(2) :133-135.

[12] 许小健 , 张金轮. 基于并行优选策略的差分进化算法 [J]. 厦门理工学院学报 ,2009 ,17(3) :73-78.

[13] 金菊良 , 杨晓华 , 丁晶. 基于实数编码的加速遗传算法 [J]. 四川大学学报 :工程科学版 ,2000 32(4) :20-23.

[14] STORN R , PRICE K. Differential evolution :a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous space [J]. Journal of Global Optimization ,1997 ,11(4) 341-359.

[15] 许小健 , 涂芬芬 , 黄小平 , 等. 差异演化算法在 Van Genuchten 方程参数优化估计中的应用[J]. 合肥工业大学学报 :自然科学版 ,2008 31(11) :1863-1866.

(收稿日期 2009-11-17 编辑 :方宇彤)