

删减对流项方法模拟跨临界水流

宋桂云 易 路 陆东燕 孙佳佳 李小虎

(河海大学环境学院 ,江苏 南京 210098)

摘要 介绍一种能够处理明渠水流跨临界问题的数值计算方法——删减对流项方法。通过求解圣维南方程组特征方程理论分析了该方法在模拟明渠跨临界水流的可行性 ,并通过矩形断面明渠内恒定跨临界水流的数值模拟试验 ,研究分析删减系数计算公式中的参数取值对模拟结果的影响。研究结果表明 ,采用该方法模拟明渠跨临界水流在理论和实践上均是可行的 ,并能较准确地捕捉水力间断位置 ,参数选择应综合考虑水跃突变过程和跃前水面线的模拟准确性。

关键词 跨临界水流 ;删减对流项 ;圣维南方程组

中图分类号 :O35 **文献标识码** :A **文章编号** :1006-764X(2010)S1-0038-03

模拟一维非恒定水流的数学模型为圣维南方程组 ,通常采用特征线、有限单元、有限体积以及有限差分等方法对方程进行求解 ,得到模拟河段的水动力过程。但是 ,当水流流态由急流向缓流或缓流向急流转变时 ,流态发生变化使得数值计算存在间断点 ,数值模拟的算法结构需要做出相应变化^[1]。如急流条件下计算域仅受上游来流的影响 ,而不考虑下游的影响 ,缓流条件下计算域同时受上、下游水流的影响 ,因而 2 种流态所需的边界条件类型不同 ,相应的算法结构也不同。Preissmann 四点隐式差分格式是最简单、应用最广泛的格式之一 ,但由于边界条件类型的限定 ,这种格式在不做修正的情况下不能模拟跨临界水流。针对这种情况 ,1985 年 Havnø 等^[2]首先提出了删减动量方程对流项的方法来模拟跨临界水流 ,当水流流态转变时 ,删减动量方程中的对流项 ,使得缓流、急流同时存在的计算域内可以采用同一算法结构(即缓流型算法结构)进行求解。后来 Kutija^[3]和 Djordjevic 等^[4]对此方法进行了验证和改进 ,改进的措施主要有 :①将删去全部对流项 $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A}\right)$ 改为删去部分对流项 $Q \frac{\partial u}{\partial x}$;②在对流项前乘以 1 个关于弗劳德数 Fr 的系数 ,随着缓流到急流的改变逐渐全部或部分删去对流项。

因此 ,删减对流项方法模拟跨临界水流的方法是在传统一维圣维南方程组的基础上 ,在其动量方程的对流项前乘以 1 个删减系数 ,水流流态改变时 ,通过删减部分或全部对流项达到模拟跨临界水流的目的

的 ,并根据流体 Fr 的大小来确定对流项的删减程度。该方法由于删减了动量方程中的惯性项(即惯性力) ,动量方程是扩散的 ,尤其在急流向缓流转变的水跃过程特征明显 ,因而不能模拟水跃突变陡峭的锋面 ,而删去惯性项的好处是降低了间断点附件的数值振荡 ,使得数值模拟时可不必添加人工黏性项。

1 删减对流项方法

1.1 理论可行性分析

描述明渠一维非恒定流的基本方程为圣维南方程组 ,无旁侧入流或出流条件下 ,表述为

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \left(\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{Q|Q|}{K^2} \right) = 0 \tag{2}$$

其中 $K = CA\sqrt{R} = \frac{1}{n}AR^{2/3}$ $C = \frac{1}{n}R^{1/6}$

式中 : Z 为水位 ; t 为时间坐标 ; x 为空间坐标 ; Q 为流量 ; B 为水面宽度 ; A 为过水断面面积 ; K 为流量模数 ; C 为谢才系数 ; n 为糙率 ; R 为水力半径 ; α 为对流项的删减系数 ,是关于 Fr 的函数。

通过求解圣维南方程组的特征线方程 ,分析采用删减对流项方法模拟明渠跨临界水流的可行性。

为便于求解方程的特征值 ,将动量方程(2)改写成如下形式 :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + 2\alpha u \frac{\partial Q}{\partial x} + (gA - \alpha Bu^2) \frac{\partial Z}{\partial x} + gA \frac{Q|Q|}{K^2} = 0 \tag{3}$$

作者简介 宋桂云(1984—),女,天津蓟县人,硕士研究生,从事水环境数值模拟、环境影响评价与规划等研究。E-mail :sgy031412@sina.com

设 $U = (Z, Q)^T$, 则圣维南方程组可写成

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \bar{A} \frac{\partial U}{\partial x} = \bar{B} \quad (4)$$

其中

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{B} \\ gA - \alpha Bu^2 & 2\alpha u \end{pmatrix} \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -gA \frac{Q|Q|}{K^2} \end{pmatrix}$$

可通过求解

$$\lambda^2 - 2\alpha u\lambda - \frac{gA}{B} + \alpha u^2 = 0 \quad (5)$$

得到系数矩阵 $\bar{A}$ 的 2 个相异的特征值:

$$\lambda_{1,2} = \alpha u \pm \sqrt{(\alpha^2 - \alpha)u^2 + \frac{gA}{B}} \quad (6)$$

a. 当 $\alpha = 1.0$ 时, 即对动量方程中的对流项不做删减, 则特征值 $\lambda_1 = u + \sqrt{gA/B}$, $\lambda_2 = u - \sqrt{gA/B}$ 。其特征方向(特征线方程)为

$$\frac{dx}{dt} = C_+ = u + \sqrt{\frac{gA}{B}} \quad \frac{dx}{dt} = C_- = u - \sqrt{\frac{gA}{B}}$$

由弗劳德数的定义 $Fr = u/\sqrt{gA/B}$, 则缓流时 $Fr < 1.0$, 即 $u < \sqrt{gA/B}$, 所以 $C_+ = u + \sqrt{gA/B} > 0$, $C_- = u - \sqrt{gA/B} < 0$ 2 条特征线的斜率异号; 急流时 $Fr > 1.0$, 即 $u > \sqrt{gA/B}$, 所以 $C_+ = u + \sqrt{gA/B} > 0$, $C_- = u - \sqrt{gA/B} > 0$ 2 条特征线的斜率同号, 均为正。因此数值求解时, 急流与缓流条件需要不同的算法结构。

b. 当 $\alpha = 0$ 时, 即删去动量方程的对流项, 则特征线方程为

$$\frac{dx}{dt} = C_+ = \sqrt{\frac{gA}{B}} \quad \frac{dx}{dt} = C_- = -\sqrt{\frac{gA}{B}}$$

此时 2 条特征线的斜率也与流态无关, 恒保持异号, 急流和缓流条件下可以采用相同的算法结构。

综上所述, 删去动量方程对流项模拟明渠跨临界水流在理论上是可行的。

1.2 删减系数确定方法

删减系数是流态转变时对流项删减程度的表征, 是跨临界水流模拟的关键, 应根据流体的具体流态确定, 因此 Djordjevic 等^[5]认为删减系数应该是关于 Fr 的函数。陈杨^[6]在 Djordjevic 研究的基础上, 提出部分对流项 $Q \frac{\partial u}{\partial x}$ 的删减系数 α 确定公式:

$$\alpha = \begin{cases} 1 & Fr \leq Fr_1 \\ 1 - \left(\frac{Fr - Fr_1}{Fr_2 - Fr_1} \right)^2 & Fr_1 \leq Fr \leq Fr_2 \\ 0 & Fr \geq Fr_2 \end{cases} \quad (7)$$

式中: Fr 为 4 个临近计算点的弗劳德数的平均值; Fr_1, Fr_2 为待定常数, 是确定删减系数的下临界值

和上临界值。当 $Fr_1 = 0.9, Fr_2 = 1.15$ 时, α 随 Fr 变化趋势线见图 1。

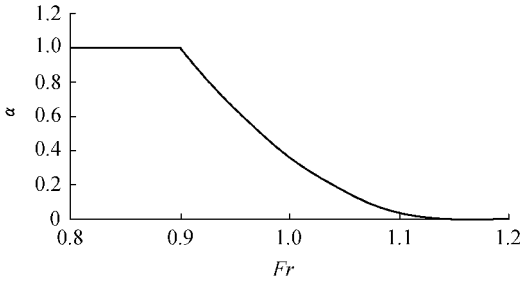


图 1 陈杨删减系数计算公式趋势线

本文拟采用式(7)作为式(2)中删减系数 α 的计算方法。下面通过矩形断面明渠内跨临界水流的数值模拟研究分析 Fr_1 和 Fr_2 的取值对模拟结果的影响。

2 算例模拟

2.1 算例及计算参数选取

MacDonald 等^[8]推导了特定条件下恒定跨临界流水面线的解析解, 笔者根据其模拟条件构造恒定跨临界流算例如下: 设一矩形断面渠道全长 $L = 2000$ m, 断面宽度 $B = 10$ m, 流量 $Q = 20$ m³/s, 曼宁糙率系数 $n = 0.02$, 边界条件: 上游入流为缓流, 下游出流也为缓流, 沿程有急缓流过渡和缓急流过渡。水流流态沿程变化情况见图 2。

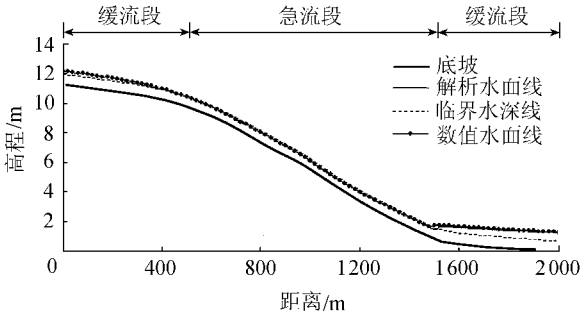


图 2 模拟渠道水流沿程变化情况

鉴于 Fr_1 和 Fr_2 均是近于 1.0 的常数, 因此, 模拟计算时均取 1.0 作为初值开始试算, 并以 0.05 差值做递减或递增。

计算参数选取: 空间步长 $\Delta x = 20$ m, 时间步长 $\Delta t = 10$ s, 总计算时间为 1000 s, 时间权重因子为 1.0。

2.2 计算结果分析

通过对模拟结果进行分析, 发现 Fr_1 和 Fr_2 这 2 个待定常数的选取对缓流到急流变化过程的模拟结果影响不大, 因此笔者以急流到缓流的水跃过程为例进行分析。

2.2.1 Fr_1 变化对模拟结果的影响

Fr_1 是删减系数计算公式的下临界值, 决定着当水流流态达到某一程度时, 开始逐渐删去对流项。

当 Fr_2 值不变时,不同的 Fr_1 值对水跃突变模拟结果的影响见图 3。以 $Fr_2 = 1.15$ 为例,当 Fr_1 取值为临界弗劳德数 1.0 时,得到的跃前水面线与解析水面线吻合很好,也就是当水流为临界状态时开始删去对流项,选择时机和模拟结果较好。而当 $Fr_1 < 1.0$,也就是缓流流态时就开始删去对流项,总体看来模拟的水跃突变深度随着 Fr_1 值的逐渐减小而越见平缓,并由于突变位置捕捉误差和水跃深度模拟误差导致跃前水面线模拟结果不甚理想。产生这种结果的原因是 Fr_1 取值越小,在相同流态下删减系数计算值越小,对流项删去程度越大,因而模拟的水跃突变越平缓。 Fr_1 取值不影响模拟计算水跃突变的位置,总是与其实际发生位置相差 1 个步长(20 m)。

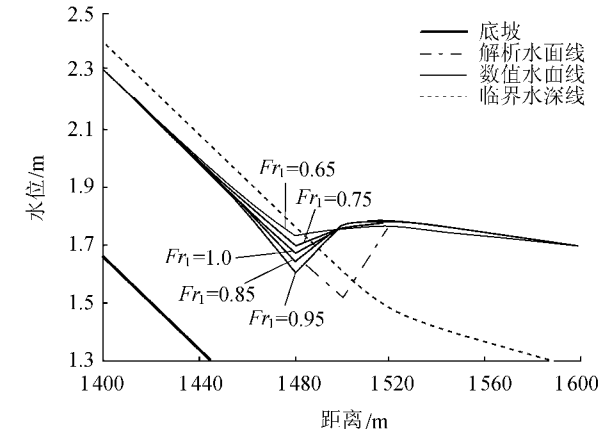


图 3 $Fr_2 = 1.15$ 时不同 Fr_1 值对模拟水跃过程的影响

2.2.2 Fr_2 变化对模拟结果的影响

Fr_1 是删减系数计算公式的上临界值,决定着当水流流态达到某一程度时,全部删去对流项。当 Fr_1 值不变时,不同的 Fr_2 值对水跃过程的影响见图 4。以 $Fr_1 = 0.85$ 为例进行分析,从变化趋势来看, Fr_2 取值越大,模拟的水跃突变深度越接近解析结果,但同时也导致跃前水面线模拟误差偏大。产生这种现象的原因是 Fr_2 取值越小,在相同水流流态时删减系数计算结果越小,对流项删减程度也就

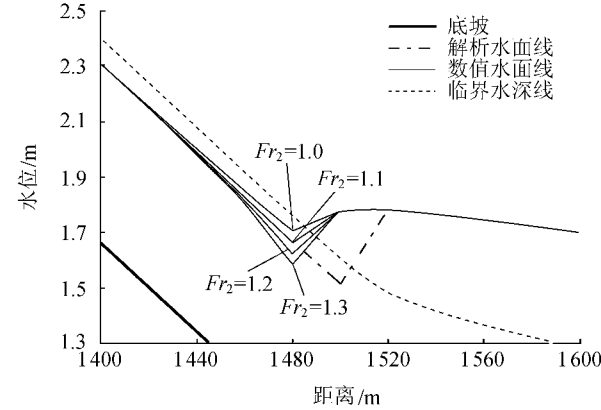


图 4 $Fr_1 = 0.85$ 时不同 Fr_2 值对模拟水跃过程的影响

越大,使得模拟的水跃突变过程越平缓。 Fr_2 的取值大小不影响模拟计算水跃突变的捕捉位置,图 4 所示计算的水跃位置与解析解相差 20 m。

3 结 论

- a. 采用删减动量方程对流项方法模拟水流从急流到缓流的水跃过程,可以较准确地捕捉流态转变的位置。
- b. 确定删减系数的上下临界值 Fr_1 和 Fr_2 的取值不影响模拟计算中流态转变的位置。
- c. Fr_1 和 Fr_2 的取值对水跃过程模拟的影响:
 Fr_2 值不变时, Fr_1 值越接近 1.0,水跃突变模拟结果越好,但水跃前水面线吻合程度较差;而 Fr_1 值不变时, Fr_2 取值越大,模拟结果越好,但也使跃前计算水面线与解析结果偏差较大。因此,在数值模拟跨临界水流时应综合考虑这 2 方面的因素,确定合适的临界值。
- d. 数值模拟时,时间步长、空间步长、时间权重因子、空间权重因子等计算参数的选取可能会影响 Fr_1 和 Fr_2 的取值,从而影响删减系数的确定,对此有待于进一步研究。

参考文献：

[1] 陈杨.一维跨临界流数值模拟研究进展[J].水利科技与经济,2006,12(8):496-498.

[2] HAVNØ K, BRORSEN M, REFSGAARD J C. Generalized mathematical modeling system for flood analysis and flood control design[C]//2th International Conference on the Hydraulics of Floods and Flood Control. Cambridge, UK: BHRA, 1985: 301-312.

[3] KUTIJA V. On the numerical modelling of supercritical flow[J]. Journal of Hydraulic Research, 1993, 31(6): 841-858.

[4] DJORDJEVIC S, PRODANOVIC D, WALTERS G A. Simulation of transcritical flow in pipe/channel networks[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2004, 130(12): 1167-1178.

[5] 陈杨.明满流过渡及跨临界流的数值模拟[D].南京: 淮海大学, 2006.

[6] MacDONALD I, BAINES M J, NICHOLS N K, et al. Analytic benchmark solutions for open-channel flows[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1997, 123(11): 1041-1045.

(收稿日期 2009-10-26 编辑 高建群)

