

DOI :10.3880/j.issn.1006-7647.2011.04.010

泄洪雨雾输运模型及其计算验证

柳海涛,孙双科,刘之平

(中国水利水电科学研究院水力学研究所,北京 100038)

摘要 针对泄洪雨雾输运过程,建立了三维数学模型。该模型以空间浓度梯度为求解变量,并采用隐式迭代方法,保证了浓度计算的精度与稳定性。通过雨雾浓度与降雨强度之间的转换关系,使其能与雾化神经网络模型进行边界耦合,对外围雨雾的输运扩散进行预报。运用该模型对二滩水电站工程泄洪洞下游雾化分布进行计算,所得结果与实测结果较吻合。

关键词 泄洪 雨雾输运 数学模型 降雨强度 原型观测 二滩水电站泄洪洞

中图分类号 :TV65 **文献标识码** :A **文章编号** :1006-7647(2011)04-0045-04

Mathematical model for rain-fog transportation during flood discharge and its verification//LIU Hai-tao, SUN Shuang-ke, LIU Zhi-ping(Department of Hydraulics, China Institute of Water Resources and Hydropower Research, Beijing 100038, China)

Abstract :A mathematical model was developed to calculate the rain-fog transportation during flood discharge. In the model, the spatial concentration gradient was regarded as the variable to be solved. By use of the implicit iteration method, the precision and stability to solve the components of the concentration gradient were ensured. The conversion formulae between the rain-fog concentration and rainfall intensity were employed so as to make the model execute boundary coupling with the neural network model for rain-fog and to predict rain-fog transportation and diffusion. The proposed model was applied to the calculation of distribution of rain-fog in the downstream of the flood discharge tunnel of Ertan Hydropower Station. The results agree with the prototype observation data.

Key words :flood discharge; rain-fog transportation; mathematical model; rainfall intensity; prototype observation; flood discharge tunnel of Ertan Hydropower Station

泄洪雾化数学模型是高坝水力学研究热点之一。在雾化近区,由于雨强较大,与工程安全密切相关,因而得到较多的关注^[1-6],这其中主要包括随机溅水模型与雾化神经网络模型,前者主要适用于溅水区的模拟,后者则为雾化全场预报模型。然而,在雾化中远区,神经网络模型亦无法具体考虑风场与地形的影响,故雾化预报精度有所下降。为此,笔者通过理论分析与数学推导,开发出雨雾输运与沉降的计算模型。该模型与现有的泄洪雾化神经网络模型相结合,可完整地反映泄洪雾化全貌。

1 雾雨输运的基本方程

泄洪形成的雾雨主要由液态水组成,雾化影响范围一般不超过 2 km,因此可不考虑大气温度、密度的时空变化。在数学方程中对气流、液态水的紊动扩散可采用 Boussinesq 模式进行描述^[7]。基于上述假定,得到雾雨输运基本方程:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u_j \frac{\partial C}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_t \frac{\partial C}{\partial x_j} \right) + \omega \frac{\partial C}{\partial x_3} + kC \quad (1)$$

式中: C 为水的质量浓度, g/m^3 ; u_j 为大气风速, m/s , $j = 1 \sim 3$; ν_t 为大气紊动扩散系数,一般取 $0.1 \sim 10 \text{ m}^2/\text{s}$; ω 为雨滴群体沉降速度, m/s ; k 为衰减系数, s^{-1} ,若不考虑水汽相变对雾区的影响,则该系数为零。

方程采用如下定解条件:①风速条件。对于自然风与水舌风场,可采用大型流体力学软件 Fluent 求解。②浓度条件。先由近区模型计算得到雾源区降雨强度分布,然后由雾雨转换关系换算为边界浓度分布,故有 $C_i(x, y, z, t) \Big|_p = C_i(x, y, z, 0)$, p 为浓度扩散边界, i 为节点编号。在初始时刻,求解域内含水浓度为零,即有 $C(x, y, z, 0) = 0$ 。③出流边界与固壁边界。求解域的上、下游和顶部边界均为开边界,流动充分发展,同时由于降雨入渗或形成地

基金项目 国家自然科学基金(50879094)

作者简介 柳海涛(1971—),男,山西祁县人,高级工程师,博士,从事水工水力学与河流动力学研究。E-mail:htliou@163.com

面径流,浓度在流出下垫面边界时亦不予限制。

2 水雾对流扩散方程的数值方法

2.1 水雾对流扩散方程的离散

首先,式(1)可改写为

$$\frac{\partial C}{\partial t} = F(t, C) = -\left[u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + (w - \omega) \frac{\partial C}{\partial z} \right] + \epsilon \left[\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right] + kC \quad (2)$$

式中左端为时间导数项,右端依次为对流项、扩散项与源项。

采用有限元方法离散上述方程,计算域采用四面体单元。则在任一单元 e 内,有如下积分表达式成立:

$$\begin{aligned} \int_e \Phi^T \Phi \frac{\partial C}{\partial t} dV = & - \int_e \left[\Phi^T \Phi u \Phi \frac{\partial C}{\partial x} + \Phi^T \Phi v \Phi \frac{\partial C}{\partial y} + \Phi^T \Phi (w - \omega) \Phi \frac{\partial C}{\partial z} \right] dV - \\ & \epsilon \int_e \left(\frac{\partial \Phi^T}{\partial x} \Phi \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^T}{\partial y} \Phi \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial \Phi^T}{\partial z} \Phi \frac{\partial C}{\partial z} \right) dV + \\ & \epsilon \int_S \left(\Phi^T \Phi \frac{\partial C}{\partial x} \cos \theta_x + \Phi^T \Phi \frac{\partial C}{\partial y} \cos \theta_y + \Phi^T \Phi \frac{\partial C}{\partial z} \cos \theta_z \right) dS - \int_e \Phi^T \Phi k \Phi C dV \end{aligned} \quad (3)$$

式中: Φ 为权函数向量,单元内插值函数与权函数相同; C 为四面体单元节点浓度向量;积分下标 S 为单元 e 的外边界, $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$; $\cos \theta_x$, $\cos \theta_y$, $\cos \theta_z$ 分别为单元表面外法向矢量与 x 轴、 y 轴、 z 轴夹角的余弦。

式(3)可进一步简写为

$$A \frac{\partial C}{\partial t} = (B_x + C_x + D_x) \frac{\partial C}{\partial x} + (B_y + C_y + D_y) \frac{\partial C}{\partial y} + (B_z + C_z + D_z) \frac{\partial C}{\partial z} + E_k C \quad (4)$$

式中: A 为单元内时间导数项矩阵; B_x, B_y, B_z 分别为单元内部沿 x, y, z 方向的对流项矩阵; C_x, C_y, C_z 分别为单元内部沿 x, y, z 方向的耗散项矩阵; D_x, D_y, D_z 分别为单元表面上沿 x, y, z 方向的扩散项矩阵; E_k 为单元内部的源汇项矩阵。上述矩阵均为 4×4 阶系数矩阵,具体表达形式与解法见文献[8]。

2.2 总体系数矩阵的构建

按照传统方法可将式(4)中单元系数矩阵合成总体矩阵,但该矩阵为 $N_p \times N_p$ 阶(N_p 为节点总数),对其求解将需要巨大的数组空间,为此本文采用如下存储方法[8]:

首先,扫描所有节点的相邻单元与节点,确定最大存储带宽 $d = \max \{N_1, N_2, \dots, N_i, \dots, N_{N_p}\} + 1, N_i$

为节点 i 的相邻节点数。由此定义 3 个指针数组: $N_O(N_E, 4), N_D(N_p, d)$ 与 $N_E(N_p, d)$ 。其含义为:当上述数组的存储数据满足 $N_O(I_E, 3) = I, N_D(I, 5) = 32, N_E(I, 4) = 29$ 时,分别表示单元 I_E 的第 3 个内部节点的总体编号为 I ,该节点第 5 个相邻节点的总体编号为 32,同时该节点的第 4 个相邻单元的编号为 29。

然后,根据每个节点的指针数组,将单元系数矩阵的各元素合并到存储数组中。如对于单元 I_E 的系数矩阵元素 a_{ij} ,该元素在总体系数矩阵中的叠加位置为 $[I, J]$,其中 $I = N_O(I_E, i), J = N_D(I_E, j)$,而按照本文存储方法,需要在节点 I 的相邻节点中进行查找,当 $N_D(I, J_d) = J$ 时,该元素的存储位置为 $[I, J_d]$ 。作为约定,总体矩阵中对角线元素的存储位置为 $[I, 0]$ 。

按照上述方法,可合成计算域的总体矩阵方程:

$$\begin{aligned} A \frac{\partial C}{\partial t} = & B_x \frac{\partial C}{\partial x} + B_y \frac{\partial C}{\partial y} + B_z \frac{\partial C}{\partial z} + \\ & (C_x + D_x) \frac{\partial C}{\partial x} + (C_y + D_y) \frac{\partial C}{\partial y} + \\ & (C_z + D_z) \frac{\partial C}{\partial z} + E_k C \end{aligned} \quad (5)$$

式中各项的总体系数矩阵均缩减为 $N_p \times d$ 阶矩阵;计算变量为 d 阶向量,其顺序与相邻节点编号相同。这样计算所需的存储量可达到最小。

2.3 节点浓度梯度的计算方法

首先,根据单元节点的浓度求出所有单元内的空间浓度梯度。假设单元 4 个节点的浓度向量为 $C = [C_1, C_2, C_3, C_4]$;节点坐标为 $[x_i, y_i, z_i], i = 1 \sim 4$;单元空间浓度梯度为 $\left[\frac{\partial C}{\partial n} \right] = \left[\frac{\partial C}{\partial x}, \frac{\partial C}{\partial y}, \frac{\partial C}{\partial z} \right]$,则沿 $L_{12}L_{13}$ 与 $L_{14}L_{34}$ 个矢量方向可建立浓度差方程:

$$\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial C}{\partial x} \\ \frac{\partial C}{\partial y} \\ \frac{\partial C}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 - C_1 \\ C_3 - C_1 \\ C_4 - C_1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

当 $C = 0$ 时,浓度梯度为零。

然后,根据节点指针数组 $N_E(N_p, d)$ 与风速求解每个节点的浓度梯度。式(5)中扩散项的节点浓度梯度取所有相邻单元浓度梯度的矢量和,对流项的节点浓度梯度也可采用上游迎风单元的浓度梯度。

2.4 方程组的隐式迭代方法

为保持计算的稳定性,将式(5)化为如下隐式迭代方程:

$$A_E \left[\frac{\partial C}{\partial t} \right]_n = -A_D \left[\frac{\partial C}{\partial t} \right]_{n-1} + B_x \left[\frac{\partial C}{\partial x} \right]_{u,n-1} +$$

$$B_y \left[\frac{\partial C}{\partial y} \right]_{v,n-1} + B_z \left[\frac{\partial C}{\partial z} \right]_{w,n-1} +$$

$$(C_x + D_x) \left[\frac{\partial C}{\partial x} \right]_{n-1} + (C_y + D_y) \left[\frac{\partial C}{\partial y} \right]_{n-1} +$$

$$(C_z + D_z) \left[\frac{\partial C}{\partial z} \right]_{n-1} + E_k [C]_{n-1} \quad (7)$$

式中:对时间导数项中系数矩阵进行了分解, $A = A_E + A_D$, A_E 仅保留第 0 列系数元素,将非 0 列系数矩阵 A_D 移至右端,下标 n 与 $n-1$ 分别表示每个时间步长内的迭代步数。其余系数矩阵变量定义同前。

每个时间步长内,假定浓度随时间 t 的变化满足 $C = C_0 + bt + ct^K$,则浓度的时间变化满足下式:

$$C_n = C_{n-1} + \frac{\Delta t}{K} \left\{ \left[\frac{\partial C}{\partial t} \right]_n + (K-1) \left[\frac{\partial C}{\partial t} \right]_{n-1} \right\} \quad (8)$$

式中:下标 $n-1$ 表示上一时刻末的变量值,系数 $K=1 \sim 2$ 。

在每个时间步长内,先利用上一时刻末的浓度梯度,由式(7)计算得到浓度的时间变化率,然后由式(8)得到该时段末的节点浓度值。再由式(6)得到新的浓度梯度矢,并将其回代入式(7),可计算出新的浓度变化率。重复上述循环,直到式(8)前后 2 次计算的浓度残差满足收敛条件。实际计算表明,上述隐式迭代方法只需 4 次左右即可收敛。

3 雨雾浓度与沉降速度的关系

3.1 地面附近的群体降落速度

单个水滴在地面附近的沉降速度可采用式(9)来表示^[9]:

$$v(D) = \alpha D^\beta \quad (9)$$

式中: v 为雨滴降落速度,m/s; D 为雨滴直径,mm; α 和 β 为经验系数,根据相关的实测资料^[9]可知 $\alpha = 3.778, \beta = 0.67$ 。

雨滴粒径分布函数 $N(D)$ 可采用 Γ 型雨滴谱^[10-11]:

$$N(D) = N_0 D^\mu e^{-\Lambda D} \quad (10)$$

式中: $N(D)$ 为单位体积空间内某一粒径雨滴数密度, $m^{-3}mm^{-1}$; N_0 为 300 ~ 300 000 之间的常数; μ 为经验系数,一般取 $-2 \sim 2$ 之间的整数; Λ 为雨强系数, $\Lambda = 4.1 P^{-0.21}$, P 为降雨强度,mm/h。

若已知空间任一点的雨滴谱与降落速度,则该处降雨强度 P 可表示为

$$P = \frac{\pi}{6} \int_0^\infty D^3 V(D) N(D) dD =$$

$$\frac{\pi}{6} \int_0^\infty \alpha D^{\beta+3+\mu} N_0 e^{-\Lambda D} dD \quad (11)$$

令 $x = \Lambda D$,经过积分处理最后得到:

$$P = \frac{0.0036\alpha\pi N_0 \Gamma(\beta+4+\mu)}{6\Lambda^{\beta+4+\mu}} \quad (12)$$

同理,该处的雨滴体积浓度 C' 可表示为

$$C' = \frac{\pi}{6} \int_0^\infty D^3 N(D) dD = \frac{\pi N_0 \Gamma(4+\mu)}{6 \times 10^9 \Lambda^{4+\mu}} \quad (13)$$

式中: C' 为无量纲体积含水浓度。

由此可知,雨区任一点的群体降落速度可表示为含水浓度的函数:

$$\omega = \frac{P}{C'} = \frac{\alpha \Gamma(\beta+4+\mu)}{\Lambda^\beta \Gamma(4+\mu)} = \frac{\alpha \Gamma(\beta+4+\mu)}{\Gamma(4+\mu)} \left[\frac{6 \times 10^9 C'}{\pi N_0 \Gamma(4+\mu)} \right]^{\frac{\beta}{4+\mu}} \quad (14)$$

3.2 降雨强度与含水浓度的转换方法

不同的降雨强度对应不同的雨滴谱。随着含水浓度的增加,雨滴碰并增多,大粒径雨滴增加,雨强也会加大;反之亦然。由式(12)可知,雨滴谱函数的系数 N_0 与降雨强度 P 呈如下关系:

$$N_0 = \frac{6 \times 10^9}{3.6 \times 10^6} \frac{P \Lambda^{\beta+\mu+4}}{\alpha \pi \Gamma(\beta+\mu+4)} \quad (15)$$

若已知某一点的 P ,要求解该点的 C' 与 ω 。可令 μ 为经验常数,根据式(15)求出 P 对应的 N_0 ,然后代入式(12)与式(13)即可求出 C' 和 ω 。上述方法可用于解决雾化近区降雨强度计算模型与水雾扩散模型的边界衔接问题。

若已知某一点的 C' ,要求解该点的 P 与 ω 的分布规律,则需要采用试算的方法。首先假定一个 N_0 值,运用式(14)求出 ω ,然后求出 P 将求得的 P 代入式(15)得到新的 N_0 值。重复上述步骤,直到满足精度要求。

4 计算实例

4.1 工程概况与计算条件

以二滩水电站下游 1 号泄洪洞与 2 号泄洪洞为例,运用雾化数学模型对其下游雾化降雨分布进行计算,并与相应的实测资料^[12]进行对比验证。计算工况见表 1,工况 1 和工况 2 的风场条件皆为水舌风。

表 1 二滩下游泄洪洞观测工况

工况	上游水位 H_1/m	下游水位 H_2/m	流量 $Q/$ $(m^3 \cdot s^{-1})$	入水 流速/ $(m \cdot s^{-1})$	入水 角度/ $\tan \theta$	水舌 挑距/ $(L \cdot m^{-1})$
1	1199.77	1012.40	3688	41 ~ 47	0.73 ~ 1.41	174 ~ 219
2	1199.86	1012.90	3692	42 ~ 46	0.84 ~ 1.26	175 ~ 205

计算过程中,水舌入水形态及表面速度由掺气

水舌运动模型^[1]求得,雾化近区的降雨强度分布采用人工神经网络模型^[6]求得,上述结果可作为雾雨输运模型的风场与浓度计算边界。图1与图2分别为1号泄洪洞和2号泄洪洞计算域下垫面计算网格,计算长度为2000 m,高度约为270 m,水舌表面计算网格尺度为3~10 m,岸坡地形计算网格尺度为20~50 m。

4.2 风场计算结果

以雾化水舌作为流速边界(图中阴影部分),可求解山谷内的三维水舌风场。图3与图4分别为1号泄洪洞和2号泄洪洞下游地面附近的风速等值线图,在水舌入水点附近风速均超过了10 m/s。

4.3 降雨强度分布计算结果

将三维计算网格、近区边缘降雨强度边界条件以及水舌风场输入雾雨输运模型,可计算得到下游

降雨强度分布。计算中取 $\mu = -2$,边界降雨强度为200 mm/h,对应的雾雨质量浓度取 $C_0 = 11.9 \text{ g/m}^3$ 。图5与图6为计算得到的降雨强度等值线分布,图中方框数据为实测值(具体位置对应方框左下角)。分析表明,计算值与实测值在总体分布上基本一致;1号泄洪洞右岸的实测结果大于计算结果,原因在于泄洪过程中由于该岸侧岸坡较为突出,右侧水舌干砸本岸,形成了新的雾化源^[11]。

5 结 语

通过理论与推导,提出雾雨输运与沉降的三维数值模型。该模型以浓度梯度为求解变量,保证雾雨浓度的精度与非负性;采用隐式迭代方法,保证数值计算的稳定性;运用气象学中雨滴谱函数与水滴沉降速度的概念,导出雨雾浓度与降雨强度

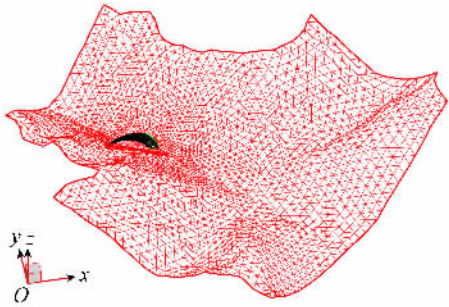


图1 1号泄洪洞下垫面计算网格

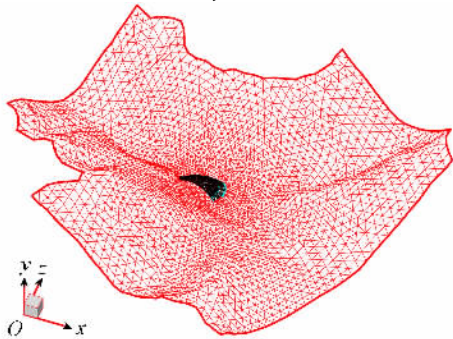


图2 2号泄洪洞下垫面计算网格

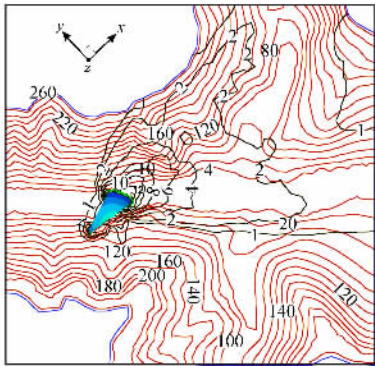


图3 1号泄洪洞下游地面水舌风等值线(单位:m/s)

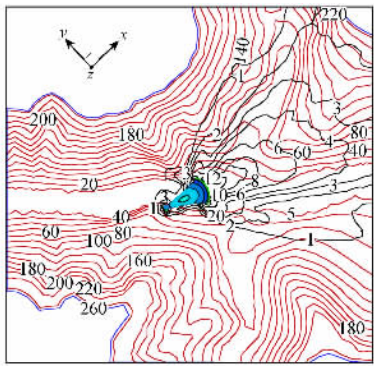


图4 2号泄洪洞下游地面水舌风等值线(单位:m/s)

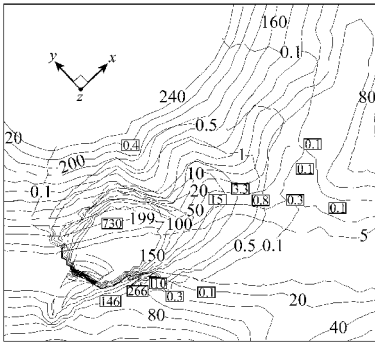


图5 1号泄洪洞下游地面降雨分布(单位:mm/h)

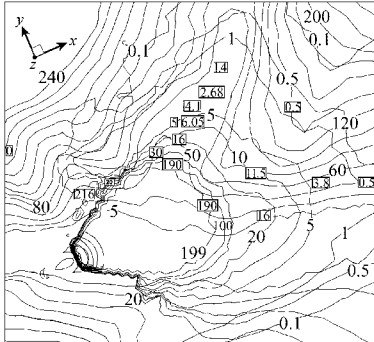


图6 2号泄洪洞下游地面降雨分布(单位:mm/h)

(下转第94页)

[4] 田嘉宁. 半封闭性港口化学需氧量数值模拟[J]. 西安理工大学学报, 1995, 11(4): 292-296.

[5] 何波, 张兆华. 广州港南沙港区总体规划方案[J]. 水运工程, 2004, 362(3): 76-78.

[6] 辛文杰, 罗小峰. 广州港南沙港区总体布局方案平面二维潮流泥沙数值模拟[R]. 南京: 南京水利科学研究院, 2001.

[7] 杨树森. 广州港南沙港区起步和总体布局方案港池与航道泥沙淤积计算和分析[R]. 天津: 天津水运工程研究所, 2001.

[8] 辛文杰, 何杰. 广州港南沙港区南沙作业区控制性详细规划潮流泥沙数学模型研究[R]. 南京: 南京水利科学研究院, 2007.

[9] 何杰, 辛文杰. 含有紊动黏性项浅水方程的数值求解[J]. 水利水运工程学报, 2010, 9(3): 95-100.

[10] 何杰. 半封闭港池水交换的数值模拟及其应用[D]. 南京: 南京水利科学研究院, 2009.

[11] 何杰, 辛文杰. 挖入式港池水体交换能力研究[J]. 水利学报, 2007, 38(增刊): 330-333.

(收稿日期 2010-11-29 编辑 方宇彤)

(上转第 48 页)

之间的相互转换关系,使其能与雾化近区模型进行边界耦合。最后,结合实际工程的雾化原型观测数据对数学模型进行验证,计算结果较为合理。

参考文献:

[1] 柳海涛, 孙双科. 挑流水舌空中形态与含水浓度的数值解法[C]//唐洪武. 2007 水力学与水利信息学进展. 南京: 河海大学出版社, 2007: 511-516.

[2] LIU Shi-he, SUN Xiao-fei, LUO Jing. Unified model for splash droplets and suspended mist of atomized flow[J]. Journal of Hydrodynamics Ser B, 2008, 20(1): 125-130.

[3] 孙笑菲, 刘士和. 雾化水流溅抛水滴运动深化研究[J]. 水动力学研究与进展: A 辑, 2008, 23(1): 61-66.

[4] 张华. 挑流水舌的水滴随机喷溅数学模型[J]. 水利学报, 2003, 34(8): 21-25.

[5] 柳海涛, 刘之平, 孙双科. 水舌入水喷溅的随机数学模

型[J]. 水利水电科技进展, 2009, 29(6): 1-4.

[6] 柳海涛, 孙双科, 刘之平, 等. 泄洪雾化预测的人工神经网络方法探讨[J]. 水利学报, 2005, 36(10): 1241-1245.

[7] 刘士和. 高速水流[M]. 北京: 科学出版社, 2005: 165-166.

[8] 柳海涛. 挑流消能泄洪雾化理论与计算模型研究[D]. 北京: 中国水利水电科学研究院, 2009.

[9] ATLAS D, ULBRICH C W. Path and area integrated rainfall measurement by microwave attenuation in the 1-3 cm band[J]. Journal of Applied Meteorology, 1977, 16: 1322-1331.

[10] 窦康贤, 王连仲. 雨滴谱参数估计优化方案及其微物理资料检验[J]. 电波科学学报, 2001, 16(4): 493-497.

[11] 刘黎平. 雨区衰减及谱变化影响雷达测雨精度的数值模拟[J]. 南京气象学院院报, 1994, 17(2): 255-258.

[12] 刘之平, 刘继广, 郭军. 二滩水电站高双曲拱坝泄洪雾化原型观测报告[R]. 北京: 中国水利水电科学研究院, 2000.

(收稿日期 2010-11-24 编辑 高建群)

(上接第 51 页)

$R_0 > R_{0.01}$ 为显著相关, 可认为 m' 与 H/δ 之间的线性关系密切。因此, 可用式(7)计算平底溢洪闸综合流量系数。但应注意式(7)的适用条件为 $0.1 < H/\delta < 0.4$, 即符合宽顶堰条件。对小型工程或中型工程的可行性研究阶段, 平底溢洪闸 m' 也可近似按 $0.33 \sim 0.37$ 取值。

4 结 语

在溢洪道工程设计中, 平底溢洪闸是常见的工程布置形式, 因此, 本文提出的其综合流量系数确定方法具有实用参考价值。但由于本文的试验数据均为溢洪闸在自由泄流(非淹没)情况下取得的, 因此, 综合流量系数计算公式(式(7))不适用于溢洪闸淹没出流情况。

参考文献:

[1] SL253—2000 溢洪道设计规范[S].

[2] 单长河, 齐清兰. 无坎宽顶堰流量系数的计算及讨论[J]. 研究与设计, 2008(5): 31-32.

[3] 吴持恭. 水力学[M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2001: 392-399.

[4] 杨健, 万继伟, 吴桐, 等. 大变幅相对淹没度下冲沙闸的水力特性试验[J]. 水利水电科技进展, 2009, 29(2): 22-25.

[5] 夏毓常, 张黎明. 水工水力学原型观测与模型试验[M]. 北京: 中国电力出版社, 1999: 22-25.

[6] 郭福厚. 水工建筑物堰流流量系数拟合[J]. 农业与技术, 2006, 26(1): 94-96.

[7] 高玉芹. 平底闸扩孔后堰流流量系数变化初探[J]. 治淮, 2007(5): 18-19.

[8] 肖筱南. 新编概率论与数理统计[M]. 北京: 北京大学出版社, 2002: 379.

(收稿日期 2010-10-26 编辑 方宇彤)