

自然单元法与有限元法和无单元法的比较

琚宏昌,刘平伟,张胜利

(广西工学院鹿山学院,广西柳州 545616)

摘要:为了分析自然单元法的特点,进行了自然单元法与有限元法、无单元法的比较,介绍了自然单元法的基本原理,即基于点集的 Voronoi 图及其对偶 Delaunay 三角剖分,以自然邻节点为插值试函数,构建平衡方程进行求解。剖析了 3 种方法的基本性质,说明自然单元法、有限元法和无单元法均具有单位分解条件。认为自然单元法是一种无网格方法,其形函数构造简单,能与有限元法一样直接施加本质边界条件,可以求解有限元法较难处理的裂纹扩展和大变形等问题。

关键词:自然单元法;有限元法;无单元法;自然邻节点插值;单位分解;形函数

中图分类号: O241.82 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-7647(2012)02-0037-05

Comparative study on natural element method, finite element method and meshless method// JU Hong-chang, LIU Ping-wei, ZHANG Sheng-li (Lushan College of Guangxi University of Technology, Liuzhou 545616, China)

Abstract: In order to analyze the characteristics of the natural element method (NEM), comparison among NEM and the finite element method (FEM) and the meshless method (MM) is carried out. The basic principles of NEM is introduced in this paper, that is, NEM is based on the Voronoi tessellation of a set of nodes and the Delaunay triangulation of the topological dual of the Voronoi diagram, taking the natural neighbor interpolation as trial function and building the equilibrium equations to solve problems. NEM is considered to be a meshless method, and its shape functions can be constructed simply. By analyzing the basic properties of the three methods, the paper shows that the three methods have the same condition: partition of unity. Similar to FEM, NEM can exactly interpolate piece-wise linear boundary conditions. However, NEM is advantageous over the traditional FEM in solving problems with propagation of crack and large deformation and so on.

Key words: natural element method; finite element method; meshless method; natural neighbor interpolation; partition of unit; shape function

自然单元法(natural element method, NEM)是一种求解偏微分方程的新型数值方法。Braun 等^[1]于 1995 年首先将基于 Sibson 插值的自然单元法应用于求解高度不规则网格的偏微分方程,并指出这种数值方法可用于有限元法的应用领域,从此,自然单元法得到了极大的关注。

Sukumar 等^[2-3]将自然单元法应用于二维弹性力学问题的研究,详细讨论了自然单元法在裂纹体及材料的不连续体中的应用。Cueto 等^[4-6]研究了在自然单元法中施加本质边界条件的方法,给出了其在固体力学和流体力学中应用的算例。Gonzalez 等^[7]对自然单元法数值积分方案和自然单元法中的体积闭锁问题进行了研究。Yvonnet 等^[8]基于约束 Delaunay 结构对自然单元法做了扩展,解决了非凸

边界上不满足线性插值的问题。Cho 等^[9]对二维接近不可压缩物体的大变形问题进行了分析。Calvo 等^[10]采用自然单元法分析了大应变超弹性问题。Alfaro 等^[11-12]采用基于 α -shape 的自然单元法对刚塑性模型的三维铝挤压成型过程进行了分析,并对自然单元法的计算精度特别是计算效率问题作了较为深入的研究。

国内学者在自然单元法研究和应用方面也做了很多工作。朱怀球^[13]对 Sibson 插值基函数的性质进行了研究,给出了基函数的一阶导数数学表达式及其数学性质。朱合华等^[14]将自然单元法应用于求解弹塑性问题。王兆清等^[15]对自然单元法的发展概况及进展进行了综述。卢波等^[16-18]对自然单元法数值积分方案进行了研究,对有限元法、无单元

法及自然单元法进行了比较。余天堂^[19]用自然单元法对加锚体进行了分析计算。李武等^[20]分析了自然单元法数值积分产生误差的各种可能的原因,并提出使用蒙特-卡罗方法以提高数值积分的精度和效率。戴斌等^[21]对自然单元法三维算法进行了初步研究。曾祥勇等^[22]应用自然单元法分析了 Winkler 地基上薄板弯曲问题。蔡永昌等^[23]采用局部 Petrov-Galerkin 法建立系统平衡方程以减少自然单元法的计算时间,提高该方法的计算效率。江涛等^[24-26]应用自然单元法研究了裂纹与材料边界等问题。

本文对自然单元法、有限元法和无单元法的形函数性质进行了比较,并对自然单元法中尚待改进的问题进行了初步探讨。自然单元法兼具无网格方法和有限元法的优点,又克服了二者的不足,是一种发展前景广阔的求解偏微分方程的数值方法。

1 自然单元法形函数

自然单元法虽然在构造其形函数的过程中继承了无网格的思想,但其插值方法与无网格伽辽金方法及再生核质点方法等有所不同。自然单元法采用自然邻节点插值构造近似函数和试函数。

1.1 自然邻节点插值

自然邻节点插值的概念是建立在 Voronoi 图基础上的。图 1(a)所示为平面 7 节点 Voronoi 划分及待插值点 x 的二次 Voronoi 结构。自然邻节点根据空圆规则确定,即若 Delaunay 三角形的外接圆包含待插值点 x ,则该三角形的 3 个顶点即为待插值点的自然邻节点。标号为 1~4 的 4 个节点构成了待插值点 x 的自然邻节点,待插值点 x 与自然邻节点一起形成的 Voronoi 图称为待插值点 x 的二次 Voronoi 结构,如图 1(b)所示。

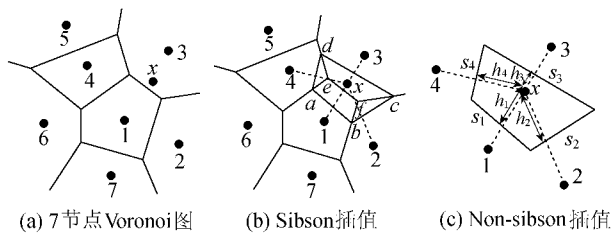


图 1 Sibson 和 Non-sibson 插值构造示意图

自然单元法形函数通过采用自然邻点插值思想的 Sibson 或 Non-sibson 插值构造,如图 1(b)和(c)所示。

采用 Sibson 插值,自然单元法形函数公式为(参见图 1(b))

$$\Phi_i(x) = \frac{A_i(x)}{A(x)} \quad A(x) = \sum_{j=1}^n A_j(x) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

式中: $A_i(x)$ 为待插值点 x 的二次 Voronoi 结构与初始 Voronoi 结构中 i 节点所对应的 Voronoi 多边形相互重叠部分的面积,例如在图 1(b)中, $A_3(x)$ 为四边形 $cdef$ 的面积, $A(x)$ 为四边形 $abcd$ 的面积; n 为 x 的自然邻节点总数。

采用 Non-sibson 插值,自然单元法形函数公式为(参见图 1(c))

$$\Phi_i(x) = \frac{\alpha_i(x)}{\sum_{j=1}^n \alpha_j(x)} \quad \alpha_j(x) = \frac{s_j(x)}{h_j(x)} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

式中: $s_j(x)$ 为与节点 j 关联的 Voronoi 边的长度; $h_j(x)$ 为插值点 x 到节点 j 的 Voronoi 边的垂距。

利用自然邻节点坐标 $\Phi_i(x)$, Sibson 和 Non-sibson 的位移插值格式为

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x) u_i \quad (3)$$

式中: $u_h(x)$ 是任一点 x 的位移; u_i 为节点 i 发生的位移。

Sibson 插值需要构造二阶 Voronoi 图,而 Non-sibson 插值利用 Voronoi 单胞的边长和点到 Voronoi 边的距离构造插值基函数,使 Non-sibson 插值比 Sibson 插值的计算大为简化。Sibson 插值在凸区域的边界是线性精确的,但是对于凹区域的边界,插值是不精确的,而 Non-sibson 插值则没有这个限制,因此采用 Non-sibson 插值,可以准确施加本质边界条件。

由自然邻节点插值的定义可知,节点的影响域为共享该节点的 Delaunay 三角形外接圆的并集,如图 2(a)所示。节点 A 处分别采用 Sibson 和 Non-sibson 插值方法构造的形函数如图 2(b)和(c)所示。

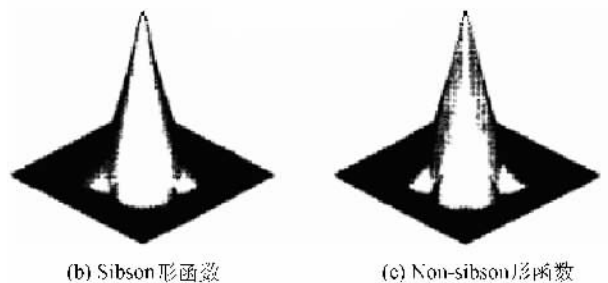
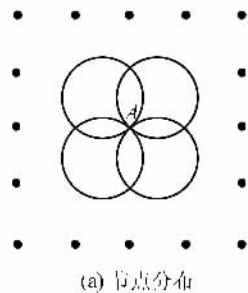


图 2 Sibson 和 Non-sibson 形函数

1.2 自然单元法形函数的性质

文献[26]证明,自然单元法形函数满足正定性、插值性、单位分解条件和线性一致性:

$$\begin{cases} 0 \leq \Phi_i(x) \leq 1 \\ \Phi_i(x_j) = \delta_{ij} \\ \sum_{i=1}^n \Phi_i(x) = 1 \\ x = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x)x_i \end{cases} \quad (4)$$

此外,自然单元法形函数还具有在边界上满足线性插值,以及除了在节点处 C^0 连续外,其余区域具有 C^∞ 光滑性的特点。

1.3 自然单元法基本原理

以二维弹性力学为例,说明自然单元法的基本原理。在边界 Γ 包围的区域 Ω ,其平衡方程和边界条件可表示为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} & \text{在区域 } \Omega \text{ 内} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} & \text{在面力边界 } \Gamma_t \text{ 上} \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} & \text{在位移边界 } \Gamma_u \text{ 上} \end{cases} \quad (5)$$

式中: \mathbf{u} 为位移向量; $\bar{\mathbf{t}}$ 、 $\bar{\mathbf{u}}$ 分别为边界上面力和位移; $\boldsymbol{\sigma}$ 为是相应于位移场 \mathbf{u} 的应力张量; \mathbf{b} 是体力向量; \mathbf{n} 为区域的外法向量。

方程(5)的变分形式为

$$\int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} d\Omega = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \in H_0^1 \quad (6)$$

式中: \mathbf{t} 为面力向量; $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为应变矩阵; H_0^1 为一维 Sobolev 空间。

将式(3)代入式(6),并考虑到检验函数节点变量变分的任意性,可得离散系统节点变量的线性方程为

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{f} \quad (7)$$

其中
$$\mathbf{K}_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_i^T \mathbf{E} \mathbf{B}_j d\Omega \quad (8)$$

$$\mathbf{f}_i = \int_{\Gamma_t} \Phi_i \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega} \Phi_i \mathbf{b} d\Omega \quad (9)$$

$$\mathbf{B}_i^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (10)$$

式中: \mathbf{K} 、 \mathbf{D} 、 \mathbf{f} 分别为刚度矩阵、节点位移矩阵和节点力矩阵; \mathbf{E} 为弹性矩阵; \mathbf{B}_i 为自然单元法形函数的导数矩阵。

2 自然单元法、有限元法和无单元法形函数的统一性

从自然单元法基本原理可以看出,在构造自然

单元法形函数的过程中不涉及矩阵的运算,而且形函数的构造简单,其导数的计算也相对简单,满足正定性、插值性、单位分解条件和线性一致性。

2.1 有限元法形函数的性质

有限元法是将整个求解域离散为有限个单元,然后在单元的基础上采用分片多项式插值构造插值函数。有限元法的形函数具有如下性质:①在节点上插值函数的值 $N_i(x_j) = \delta_{ij}$;②在单元中任一点各插值函数之和等于1,即 $\sum_{i=1}^n N_i = 1$ 。由此看出,有限元法形函数构成了单位分解。

2.2 无单元法形函数的特性

无单元法主要依靠形函数逼近来实现。无单元法按形函数逼近方式的不同,可分为3类:移动最小二乘逼近法(MLS)、再生核近似法(RKM)和单位分解法(PU)[16]。

对于平面问题,MLS插值可以精确再生多项式基线性组合函数,得到满足连续性条件的方程:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) = 1 \\ x = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x)x_i \\ y = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x)y_i \end{cases} \quad (11)$$

RKM和MLS的形函数具有相近的性质,两者均构成了单位分解。

2.3 3种形函数统一于单位分解

有限元法利用单元离散求解域,单元之间共享节点,因而形成了有限元自身的覆盖。有限元形函数构造简单,但依赖于对整个求解域的网格剖分,网格质量直接影响计算精度。

无单元法和自然单元法通过节点的影响域实现对求解域的覆盖。无单元法形函数构造只需要节点的位置信息,构造过程中必须保证在每个节点的影响域内包含“足够多同时又尽量少”的节点。“足够多”是为了保证矩阵可逆,而“尽量少”是为了保证局部逼近的特性。节点影响域的大小是人为给定的,影响域的大小直接影响计算精度,而且形函数的构造复杂,计算量大。自然单元法形函数的构造仅取决于节点的位置信息,节点的影响域是由求解域内节点的 Voronoi 结构所限定的相邻关系决定的,形函数的构造形式简单,计算量小。

虽然构造方式不同,但有限元法、无单元法及自然单元法形函数均构成了单位分解。另外自然单元法和有限元法形函数是插值函数,而无单元法形函数是逼近函数。有限元法、无单元法及自然单元法

的形函数如图 3 所示。

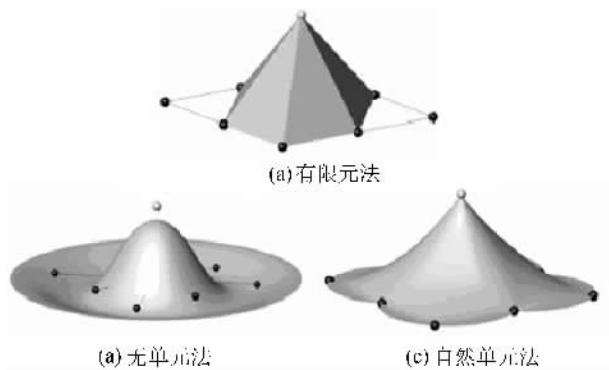


图 3 规则分布节点上有限元法、无单元法及自然单元法生成的形函数

3 自然单元法存在的问题

3.1 弱形式的积分

以 Delaunay 三角形作为背景积分网格,在单位正方形区域边界上施加线性位移场,对标准 Galerkin 方法的控制方程弱形式数值积分进行位移分片检验,计算结果显示位移和应变相对误差范数分别可达到 10^{-4} 和 10^{-3} ,没有通过小片检验^[2]。在其进行的平衡小片检验中位移和能量相对误差范数也分别可达到 10^{-4} 和 10^{-3} ,同样未能通过小片检验。自然单元法弱形式积分的这种误差,是由于自然单元法形函数的支撑域不能被分解为三角形,且自然单元法形函数不是多项式引起的。为了通过分片测试,在每个 Delaunay 三角形内需要采用至少 3 个积分点,或采用高阶高斯积分来减少积分误差。但这种方法不仅对提高计算精度不明显,而且增加了计算的复杂性,造成求解效率略低于相当精度的四节点有限元。因此自然单元法弱形式的积分方案值得进一步研究。

3.2 节点应力恢复和边界应力精度的改善

自然单元法形函数为非多项式形式,在节点处 C^0 连续而其余区域 C^∞ 光滑,其在节点处的导数不存在,这意味着自然单元法无法通过位移直接求得节点的应变及应力值。此外,其形函数在边界上相邻两节点间满足线性插值,这使得应力及应变在边界上为分段常数,应力及应变值在边界上的节点处不连续(跳跃)。因此,需要根据自然单元法算得的位移场恢复节点上的应力及应变值,并消除其在边界上的不连续(跳跃)现象,构造全域光滑的应力及应变场^[16]。

文献[18]对基于 Non-sibson 插值的自然单元法的应力恢复和误差估计进行了研究。该文采用自然单元法求得的节点位移通过 MLS 拟合构造新的位移场,以此位移场计算节点处的应变和应力。再利用节点的恢复应力,采用自然邻点插值方法得到全

域光滑的应力场。

文献[8]对基于稳定协调节点积分方案的自然单元法(nodal-NEM)的应力恢复和误差估计进行了研究,通过 nodal-NEM 方法可以方便地得到节点处的光滑应变。以节点处的光滑应变作为相应 Voronoi 单胞内的近似应变场,则 Voronoi 单胞内的近似应变场和应力场为常数,恢复应力场则通过节点处的应力由 Sibson 插值方法得到^[26]。

4 结 语

本文基于自然单元法、有限元法和无单元法形函数的构造方法和特点,进行了 3 种方法的比较,指出了 3 种形函数的单位分解共性以及自然单元法有待改进的问题。自然单元法是一种基于点集的 Voronoi 图和 Delaunay 三角化几何结构,以自然邻节点插值为试函数的一种新型求解偏微分方程的数值方法,其形函数满足正定性、插值性、单位分解条件和线性一致性,所构造的近似函数在区域边界上具有线性插值性,因而可以像有限元法一样方便地准确施加本质边界条件。由于自然单元法是无网格方法,可以方便地处理诸如复杂几何形状和裂纹扩展等问题,因此自然单元法既具有有限元法和无单元法的优点,又克服了两者的不足。自然单元法形函数的计算不涉及矩阵求逆,也不涉及权函数及相关参数的选择问题,可以方便实施。自然单元法兼具无单元法和有限元法的优点,是一种很有发展前途的数值方法。

参考文献:

- [1] BRAUN J, SAMBRIDGE M. A numerical method for solving partial differential equations on highly irregular evolving grids [J]. Nature, 1995, 376: 655-660.
- [2] SUKUMAR N, MORAN B, BELYTSCHKO T. The natural elements method in solid mechanics [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1998, 43: 839-887.
- [3] SUKUMAR N, MORAN B, SEMENOV A Y, et al. Natural neighbour Galerkin methods [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, 50: 1-27.
- [4] CUETO E, CALVO B, DOBLARE M. Modelling three-dimensional piece-wise homogeneous domains using the α -shape-based natural elements method [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002, 54: 871-897.
- [5] CUETO E, CEGONINO J, CALVO B, et al. On the imposition of essential boundary conditions in natural neighbour Galerkin methods [J]. Communications in Numerical Methods in Engineering, 2003, 19: 361-376.
- [6] CUETO E, SUKUMAR N, CALVO B, et al. Overview and recent advances in natural neighbour Galerkin methods [J].

International Journal for Numerical Methods in Engineering , 2003(4) 307-384.

- [7] GONZALEZ D , CUETO E , DOBLARE M. Volumetric locking in natural neighbour Galerkin method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering , 2004 , 61 : 611-632.
- [8] YVONNET J , COFFIGNAL G , RYCKELYNCK D , et al. A simple error indicator for meshfree methods based on natural neighbors[J]. Computers and Structures , 2006 , 84 : 1301-1312.
- [9] CHO J R , LEE H W. 2-D large deformation analysis of nearly incompressible body by natural element method[J]. Computers & Structures , 2006 84 293-304.
- [10] CALVO B , MARTINEZ M A , Doblare M. On solving large strain hyperelastic problems with the natural element method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering , 2005 62 :159-185.
- [11] ALFARO I , BEL D , CUETO E , et al. Three-dimensional simulation of aluminium extrusion by the α -shape based Natural element method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering , 2006 195 :4269-4286.
- [12] ALFARO I , YVONNET J , CHINESTA F , et al. A Study on the performance of natural neighbour-based Galerkin method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering , 2007 71 :1436-1465.
- [13] 朱怀球. Voronoi cells 网格生成与 C^∞ 插值基函数的新软件开发及其在计算流体力学中的应用研究[D]. 北京 : 北京大学 , 2000.
- [14] 朱合华 , 杨宝红 , 蔡永昌 , 等. 无网格自然单元法在弹塑性分析中的应用[J]. 岩土力学 , 2004 25(4) 671-674.

- [15] 王兆清 , 冯伟. 自然单元法研究进展[J]. 力学进展 , 2004 34(4) 437-445.
- [16] 卢波 , 葛修润 , 孔祥礼. 有限元法、无单元法及自然单元法之比较研究[J]. 岩石力学与工程学报 , 2005 24(5) : 780-786.
- [17] 沈振中 , 陈小虎 , 吴越建. 求解堤坝渗流场的罚函数无单元法[J]. 河海大学学报 : 自然科学版 , 2008 , 36(1) : 44-48.
- [18] 张鑫 , 沈振中 , 徐力群. 含孔岩体破裂过程的无单元法数值模拟[J]. 河海大学学报 : 自然科学版 , 2008 36(5) : 722-726.
- [19] 余天堂. 加锚体自然单元法分析与程序设计[J]. 计算力学学报 , 2007 24(5) 698-703.
- [20] 李武 , 姚文娟 , 朱合华 , 等. 蒙特卡罗数值积分在自然单元法中的应用[J]. 岩土工程学报 , 2008 30(5) 698-704.
- [21] 戴斌 , 王建华. 自然单元法原理与三维算法实现[J]. 上海交通大学学报 , 2004 38(7) :1223-1228.
- [22] 曾祥勇 , 朱爱军 , 邓安福. 自然单元法在 Winkler 地基薄板计算中的应用[J]. 计算力学学报 , 2008 25(4) :844-848.
- [23] 蔡永昌 , 朱合华 , 王建华. 基于 Voronoi 结构的无网格局部 Petrov-Galerkin 方法[J]. 力学学报 , 2003 35(2) :187-193.
- [24] 江涛 , 章青. 线性强化材料弹塑性分析的自然单元法[J]. 力学季刊 , 2010 31(2) 288-296.
- [25] 江涛 , 章青. 自然单元法计算裂纹与材料边界问题[J]. 应用力学学报 , 2009 26(4) 690-694.
- [26] 江涛. 固体力学自然单元法的若干问题研究[D]. 南京 : 河海大学 , 2009.

(收稿日期 2011-09-06 编辑 熊水斌)

(上接第 31 页)

- [2] 陈占军 , 朱传云 , 周小恒. 爆破荷载作用下岩石边坡动态响应的 FLAC^{3D} 模拟研究[J]. 爆破 , 2005 22(4) 8-13.
- [3] 史秀志 , 周健 , 崔松 , 等. 露天采矿爆破振动对民房危害预测的 DDA 模型及应用[J]. 中南大学学报 : 自然科学版 , 2011 42(2) 441-448.
- [4] 许红涛 , 卢文波 , 周小恒. 爆破振动场动力有限元模拟中爆破荷载的等效施加方法[J]. 武汉大学学报 : 工学版 , 2008 41(1) 67-71.
- [5] 刘亚群 , 李海波 , 李俊如 , 等. 爆破荷载作用下黄麦岭磷矿岩质边坡动态响应的 UDEC 模拟研究[J]. 岩石力学与工程学报 , 2004 23(21) 3659-3663.
- [6] 张秀丽 , 焦玉勇 , 刘泉声 , 等. 节理对爆炸波影响的数值研究[J]. 岩土力学 , 2008 29(3) :712-721.
- [7] SHI Gen-hua. Discontinuous deformation analysis : a new numerical model for the statics and dynamics of block systems [D]. Berkeley , California : Department of Civil Engineering University of California , 1988.
- [8] Mac LAUGHLIN M M , DOOLIN D M. Review of validation of the discontinuous deformation analysis(DDA) method[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in

Geomechanics , 2006 30(4) 271-305.

- [9] 朱传云 , 戴晨 , 姜清辉. DDA 方法在台阶爆破仿真模拟中的应用[J]. 岩石力学与工程学报 , 2002 21(增刊 2) : 2461-2464.
- [10] 刘红岩 , 杨军 , 陈鹏万. 爆破漏斗形成过程的 DDA 模拟分析[J]. 工程爆破 , 2004 10(2) :17-20.
- [11] 李宁 , SWOBODA G. 爆破荷载的数值模拟与应用[J]. 岩石力学与工程学报 , 1994 13(4) 357-364.
- [12] 甯尤军 , 杨军 , 陈鹏万. 节理岩体爆破的 DDA 方法模拟[J]. 岩土力学 , 2010 31(7) 2259-2263.
- [13] 徐全军 , 龙源 , 张庆明 , 等. 微差爆破震动叠加起始位置数值模拟[J]. 力学与实践 , 2000 22(5) 45-48.
- [14] GB 50218—1994 工程岩体分级标准[S].
- [15] 田昌贵 , 陈世华. 工程岩体分级标准在地下采矿工程中的应用[J]. 采矿技术 , 2005 3(4) 89-93.
- [16] 蔡斌. 国标《工程岩体分级标准》应用中的几个问题[J]. 岩土力学 , 2003 24(增刊 1) :74-76.
- [17] 朱哲明 , 李元信 , 周志荣 , 等. 爆炸荷载下缺陷岩体的动力响应[J]. 岩石力学与工程学报 , 2011 30(6) :1157-1167.

(收稿日期 2011-08-15 编辑 熊水斌)