

基于最小二乘的 N-S 方程算子分裂有限元法

王大国¹, 任燕纬², 沈连山², THAM Leslie George³

(1. 大连大学材料破坏力学数值试验研究中心, 辽宁 大连 116622 ;
2. 大连大学信息工程学院, 辽宁 大连 116622 ; 3. 香港大学土木工程系, 香港 999077)

摘要 提出一种新的求解 N-S 方程的有限元法, 即基于最小二乘的 N-S 方程算子分裂有限元法。该算法采用算子分裂法将 N-S 方程分解成扩散项和对流项, 扩散项时间离散采用向后差分格式, 空间离散采用标准 Galerkin 有限元法, 对流项时间离散采用向后差分格式, 空间离散采用最小二乘有限元法。应用该算法对方腔流和后台阶流进行数值模拟, 方腔流数值计算结果与标准解吻合很好, 在后台阶流数值模拟中给出了不同雷诺数下的流场特征和速度对比曲线, 所得计算结果与试验结果吻合较好, 表明基于最小二乘的 N-S 方程算子分裂有限元法具有较好的收敛性和较高的精度。

关键词 算子分裂法; 最小二乘法; N-S 方程; 有限元法; 对流项; 扩散项

中图分类号 :TV131 **文献标志码** :A **文章编号** :1006-7647(2012)04-0041-06

Least-square-based operator-splitting finite element method for N-S equations//WANG Da-guo¹, REN Yan-wei², SHEN Lian-shan², THAM Leslie George³ (1. *Research Center for Numerical Tests on Material Failure, Dalian University, Dalian 116622, China*; 2. *Department of Information Engineering, Dalian University, Dalian 116622, China*; 3. *Department of Civil and Structural Engineering, University of Hong Kong, Hong Kong 999077, China*)

Abstract : A new finite element method, the Least-Based Operator-Splitting (LSBOS) algorithm, was developed to solve N-S equations. At each time interval, the equations are split into a diffusion term and a convection term by adopting the operator-splitting algorithm. For the diffusion term, the temporal discretization is performed with the backward difference method and the spatial discretization is performed with the standard Galerkin method. For the convection term, the temporal discretization is also performed with the backward difference method and the spatial discretization is performed with the least square scheme. The driven square flow and the backward-facing step flow are replicated with this algorithm. The computed results agree with the standard solution for the simulations of driven square flow. For the simulations of the backward-facing step flow, the flow field characteristics and the velocity distributions also agree with the experimental data using different Reynolds numbers. These comparisons indicate that the LSBOS algorithm has good convergence and high accuracy.

Key words : operator-splitting algorithm; least square scheme; N-S equations; finite element method; convection term; diffusion term

求解 N-S 方程的数值计算方法主要有有限差分法^[1]、有限体积法^[2]和有限元法。其中,有限元法由于适合处理复杂几何形状和边界条件而成为计算力学中的优选方法,目前已经发展了多种有限元数值计算方法,传统的 Galerkin 有限元法实质上采用的是中心差分格式,随着雷诺数的增大,N-S 方程中的对流项越来越强,呈现强非线性特性,从而引起数值解的振荡失真。Petrov-Galerkin 法(P-G 法)^[3]通过将权函数取为基函数的某种修正形式使计算格式具有人工耗散能力,提高了解的精度,随后发展了多种迎

风方法,如流线迎风 Petrov-Galerkin 法(SUPG 法)^[4]等。许多其他近似方法也可以得到与 P-G 法相同的结果,如 Galerkin 最小二乘近似法(GLS 法)^[5]等。上述各方法都包含一个对原 Galerkin 法的耗散修正项,产生了一个包括二阶空间导数的附加项。Taylor-Galerkin 有限元法(T-G 法)^[6]时间方向上的 Taylor 展开先于空间上的 Galerkin 离散,相比 P-G 法不需要使用特殊的权函数,也无需确定人工耗散自由参数来达到高精度。在 T-G 法的基础上发展了多种有限元法,如二阶全展开 Euler-Taylor-Galerkin 有

限元法(ETG法)^[7]、特征线 Galerkin 法^[8]、基于 Taylor 展开的分步有限元格式^[9]等。基于特征线的分离算法(CBS法)^[10]是结合分离算法与特征线 Galerkin 法的一种比较新的算法。算子分裂法是 Yanenko^[11]在 1971 年提出的经典分裂法,该算法具有格式灵活、稳定性好等特点。Ying^[12]采用算子分裂法求解流函数涡量形式的线性 N-S 方程,证明了近似解的收敛性,但未给出数值解。曹志先等^[13]用算子分裂法求解 Burgers 方程,并分析了该算法的稳定性条件。Wang 等^[14]提出了 CBOS 方法,将 N-S 方程分裂成扩散项和对流项,对流项求解采用特征线 Galerkin 法。

本文在文献[5,11-14]的基础上,采用基于最小二乘的 N-S 方程算子分裂有限元法(least-square-based operator-splitting,简称 LSBOS)求解二维非定常黏性不可压缩流体 N-S 方程,在每个时间层上应用算子分裂技术将 N-S 方程分裂成扩散项和对流项,这样可以避免两种不同性质的物理过程在一起求解时计算的困难。扩散项是一个抛物线方程,时间离散采用向后差分格式,空间离散采用标准 Galerkin 有限元法,将其结果作为求解对流项的初值。对流项是一个双曲线方程,时间离散仍采用向后差分格式,空间离散采用最小二乘法,并且依据最小二乘法的原理直接给出权函数,避免了其他有限元法依据经验或人为选择权函数的困难。对方腔流和后台阶流进行数值模拟,在方腔流数值模拟中,给出了速度对比曲线,分析了时间步长和空间步长对数值模拟结果的影响;在后台阶流数值模拟中,描述了不同雷诺数下的流场特征和速度对比曲线,所得计算结果与试验结果吻合很好,说明该方法有很好的收敛性和较高的精度,认为该方法具有良好的应用前景。

1 控制方程

二维非定常黏性不可压缩流体 N-S 方程的无量纲形式为

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) & (i, j = 1, 2) \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中 $Re = \frac{\rho UL}{\mu}$
式中 $(u_1, u_2) = (u, v)$ 和 v 分别为水平方向和垂直方向的速度; t 为时间; p 为压强; f_1 和 f_2 分别为水平方向和垂直方向的外力 $(x_1, x_2) = (x, y)$, x, y

分别为水平方向和垂直方向的坐标; Re 为雷诺数; ρ 为流体密度; U 为特征速度; L 为特征长度; μ 为黏性系数。

2 计算方法

2.1 算子分裂法

采用 LSBOS 有限元法求解式(1),计算中用算子分裂法将式(1)分成扩散项(式(2))和对流项(式(3)):

扩散项

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{i,n+\theta}}{\partial t} - \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_{i,n+\theta}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{j,n+\theta}}{\partial x_i} \right) = - \frac{\partial p_{n+1}}{\partial x_i} + f_i \\ \frac{\partial u_{i,n+\theta}}{\partial x_i} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

对流项

$$\frac{\partial u_{i,n+1}}{\partial t} + u_{j,n+1} \frac{\partial u_{i,n+1}}{\partial x_j} = 0 \quad (3)$$

式中 $u_{i,n+\theta}, u_{j,n+\theta}$ 为扩散项(式(2))在 $n+1$ 时刻的解,同时也是对流项(式(3))在 n 时刻的初值; $u_{i,n+1}, u_{j,n+1}$ 为对流项(式(3))在 $n+1$ 时刻的解,同时也是 N-S 方程(式(1))在 $n+1$ 时刻的解。

2.2 对流项最小二乘法

将式(3)采用向后差分格式进行时间离散,并将 $u_{i,n+\theta}$ 简记为 u_i :

$$\frac{u_{i,n+1} - u_i}{\Delta t} + u_{j,n+1} \frac{\partial u_{i,n+1}}{\partial x_j} = 0 \quad (4)$$

式中 Δt 为计算时间步长。

对式(4)中的非线性项 $u_{j,n+1} \frac{\partial u_{i,n+1}}{\partial x_j}$ 采用牛顿-拉普生迭代^[15]得

$$u_{j,n+1} \frac{\partial u_{i,n+1}}{\partial x_j} = u_{i,n+1} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + u_{j,n+1} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (5)$$

将式(5)代入式(4)得

$$u_{i,n+1} + u_{i,n+1} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \Delta t + u_{j,n+1} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Delta t = u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Delta t + u_i \quad (6)$$

然后用最小二乘法求解式(6),其虚功方程如下:

$$\iint_{\Omega} \delta(u) \delta(u) d\Omega = \iint_{\Omega} \left(u_i + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Delta t \right) \delta(u) d\Omega \quad (7)$$

其中 $\delta(u) = u_{i,n+1} + u_{i,n+1} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \Delta t + u_{j,n+1} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Delta t$

$$\delta(u) = \delta u_i + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \delta u_i \Delta t + \delta u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Delta t$$

式中 Ω 为求解区域, $\delta u_i, \delta u_j$ 为虚位移。

3 有限元求解

3.1 扩散项有限元求解

扩散项有限元求解的详细推导过程与文献 [14] 中扩散项有限元求解的过程相同,在整个计算域合成可得总体有限元方程:

A_{st}u_{it} + C_{ist}p_r = O_{st}u_{it,n} + F_{is} + B_{is} (8)

式中: A_{st} 为速度对应的刚度矩阵; C_{ist} 为压力对应的刚度矩阵; O_{st}, F_{is}, B_{is} 均为载荷矩阵,具体推导参见文献 [14]; s, t 为速度的总体节点号, r 为压力总体节点号。求解式 (8) 可得 p 和 u_{i,n+theta}。

3.2 对流项有限元求解

类似扩散项的单元分析及插值,对式 (7) 进行分析,得到单元有限元方程:

D_{alpha beta}^e u_{ij}^e = G_{ia}^e (9)

其中

D_{alpha beta}^e = \int_{\Omega^e} N_{\beta}^e N_{\alpha}^e d\Omega^e + u_{j\gamma}^e \Delta t \int_{\Omega^e} N_{\beta}^e \frac{\partial N_{\gamma}^e}{\partial x_j} N_{\alpha}^e d\Omega^e + \Delta t u_{ij}^e \int_{\Omega^e} \delta_{ij} N_{\alpha}^e N_{\beta}^e \frac{\partial N_{\gamma}^e}{\partial x_j} d\Omega^e + \Delta t u_{j\gamma}^e \int_{\Omega^e} N_{\gamma}^e N_{\beta}^e N_{\alpha}^e d\Omega^e + (\Delta t \gamma u_{j\gamma}^e \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_{\gamma}^e}{\partial x_j} N_{\beta}^e \frac{\partial N_{\gamma}^e}{\partial x_j} N_{\alpha}^e d\Omega^e + (\Delta t \gamma u_{j\gamma}^e u_{ij}^e \int_{\Omega^e} N_{\gamma}^e N_{\beta}^e N_{\alpha}^e \frac{\partial N_{\gamma}^e}{\partial x_j} d\Omega^e G_{ia}^e = u_{i\gamma}^e \int_{\Omega^e} N_{\gamma}^e N_{\alpha}^e d\Omega^e + \Delta t u_{ij}^e \int_{\Omega^e} N_{\gamma}^e \frac{\partial N_{\beta}^e}{\partial x_j} N_{\alpha}^e d\Omega^e + \Delta t u_{i\gamma}^e u_{ij}^e \delta_{ij} \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_{\gamma}^e}{\partial x_j} N_{\alpha}^e d\Omega^e + \Delta t u_{j\beta}^e \int_{\Omega^e} N_{\beta}^e \frac{\partial N_{\gamma}^e}{\partial x_j} N_{\alpha}^e d\Omega^e + (\Delta t \gamma u_{j\beta}^e u_{ij}^e \int_{\Omega^e} N_{\beta}^e \frac{\partial N_{\gamma}^e}{\partial x_j} \frac{\partial N_{\beta}^e}{\partial x_j} N_{\alpha}^e d\Omega^e + (\Delta t \gamma u_{j\beta}^e u_{ij}^e u_{i\gamma}^e \int_{\Omega^e} N_{\beta}^e \frac{\partial N_{\gamma}^e}{\partial x_j} \delta_{ij} N_{\alpha}^e \frac{\partial N_{\gamma}^e}{\partial x_j} d\Omega^e

式中: N 是单元的插值函数; \alpha, \beta, \gamma, \eta 为系数, \alpha, \beta, \gamma, \eta = 1, 2, \dots, m (m 为插值单元内速度节点个数, m = 9); \delta_{ij} 为置换算子, \delta u_{ia}^e = \delta_{ij} N_{\alpha}^e, u_{j\beta}^e = \delta_{ij} u_{i\beta}^e。

合成总体有限元方程:

D_{st}u_{it,n+1} = G_{is} (10)

式中: D_{st} 为刚度矩阵; G_{is} 为载荷矩阵。

求解式 (10) 可得式 (1) 在 n + 1 时刻的速度值 u_{i,n+1}。

4 边界条件处理及 N-S 方程的求解过程

4.1 边界条件处理

采用 LSBOS 有限元法求解 N-S 方程,求解过程中只需给出扩散项的边界条件。扩散项是一个抛物

线方程,边界条件见第 5 节数值验证中的具体数值模型。

4.2 求解过程

已知 n 时刻的值,求解 n + 1 时刻的值时, N-S 方程的求解过程为: ①以 n 时刻的速度场 u_{i,n} 和压力场 p_n 作为初值,求解扩散项(式(2)),得到 n + 1 时刻速度场的过渡值 u_{i,n+theta} 和压力场 p_{n+1}; ②以 u_{i,n+theta} 作为初值,求解对流项(式(3)),得到 n + 1 时刻的速度场 u_{i,n+1}, 完成 n + 1 时刻的求解; ③转到下一时刻,重复步骤①和②。

5 数值验证

5.1 方腔流验证

方腔流是流体力学中用来检验数值模拟可靠性的经典算例,利用本文所建立的模型对方腔流进行数值模拟。如图 1 所示,方腔无量纲尺度为 1 \times 1, 内部流体的初始速度和压力都是零;顶边施加无量纲速度 u = 1, v = 0, 其他三边都是固壁,施加无滑移边界条件 u = 0, v = 0。坐标原点在方腔左下角,在该点置相对压力 p = 0。整个计算域划分为 30 \times 30 个九节点四边形单元,共有 3721 个节点。

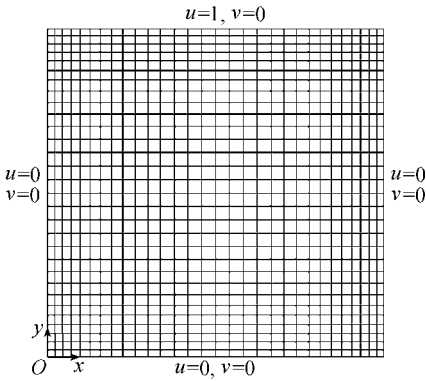


图 1 方腔流几何构型和边界条件

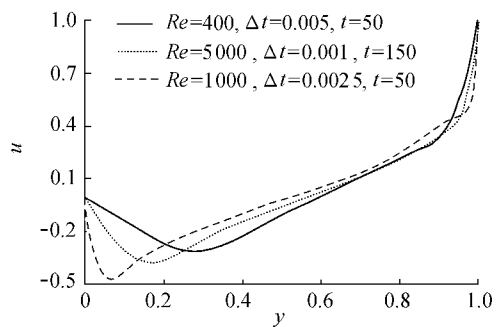
5.1.1 不同雷诺数的影响

图 2 给出了不同雷诺数下水平方向的速度 u 沿垂直中线和垂直方向的速度 v 沿水平中线的分布。图中点(圆点、上三角点、下三角点)为 Ghia 等 [17] 的计算结果,被公认为标准解;曲线(实线、虚线、点划线)为本文计算结果。

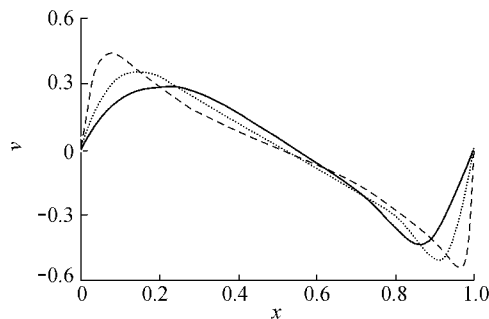
从图 2 可以看出,本文模型计算结果与 Ghia 等 [17] 的计算结果吻合很好。本文选择的网格数为 30 \times 30, 而 Ghia 等 [17] 计算的网格数为 129 \times 129, 本文算法在采用较少单元数的情况下得到了较精确的结果,这表明基于最小二乘的 N-S 方程算子分裂有限元法具有较高的精度和很好的收敛性。

5.1.2 空间步长对计算精度的影响

图 3 给出了雷诺数 Re = 1000、时间步长 \Delta t =

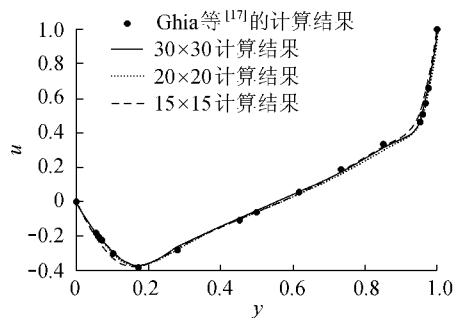


(a) u 的分布

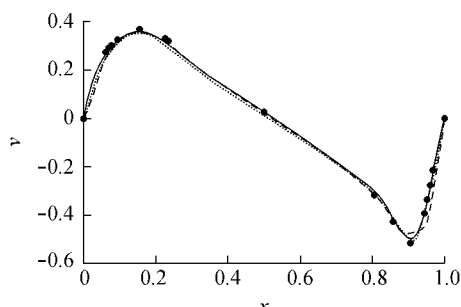


(b) v 的分布

图2 不同雷诺数下速度沿中线的分布



(a) u 的分布



(b) v 的分布

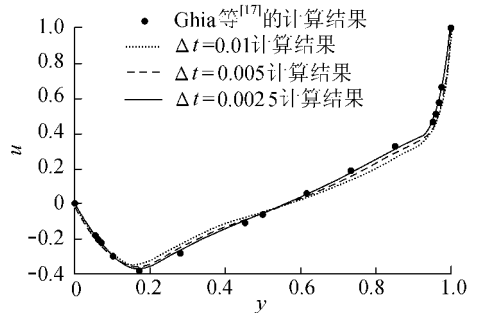
图3 $Re = 1000$ $\Delta t = 0.0025$ $t = 50$ 时速度沿中线的分布

0.0025、计算时间 $t = 50$ 时不同网格密度下的速度沿中线的分布。从图3可以看出：在同一时刻，3种不同网格密度下方腔流的速度曲线基本重合。当网格数为 30×30 时本文计算结果与 Ghia 等^[17]计算结果的平均相对误差绝对值 $\left(\epsilon = \frac{1}{N'} \sum_{i=1}^{N'} \left| \frac{u_i - u_i^*}{u_i^*} \right| \right)$ ，其中 u_i 为本文计算结果，其中 u_i^* 为标准解， N' 为 Ghia 等^[17]给出的速度值的个数， $N' = 17$ ）为

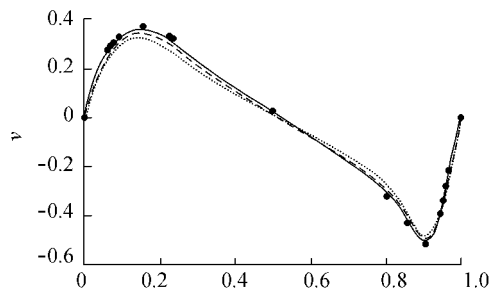
2.123%；当网格数为 20×20 时误差为 4.512%；当网格数为 15×15 时误差为 8.704%，表明本文建立的模型在小网格密度下得到的解与 Ghia 等^[17]计算结果吻合良好，本文算法收敛性好，精度高。

5.1.3 时间步长对计算精度的影响

图4给出了雷诺数 $Re = 1000$ 、计算时间 $t = 50$ 、网格数为 30×30 时不同时间步长下速度沿中线分布的对比。从图4可以看出，当 $\Delta t = 0.01$ 时，本文计算结果与 Ghia 等^[17]计算结果的平均相对误差绝对值为 9.152%；当 $\Delta t = 0.005$ 时误差为 5.476%；当 $\Delta t = 0.0025$ 时误差为 2.123%。



(a) u 的分布



(b) v 的分布

图4 $Re = 1000$ $t = 50$ 网格数为 30×30 时速度沿中线的分布

5.2 后台阶流验证

后台阶流的几何构型见图5，图中 H 为后台阶的高度， h 为入口处高度（ H 和 h 均为无量纲量），台阶长度 $L_1 = 10H$ ，台阶后长度 $L_2 = 30H$ 。入流特征速度为抛物线分布， $U = k(y - H)(H + h - y)$ 其中 k 为待定常数，根据雷诺数的不同取值不同，固壁采用无滑移条件，出口边界为压力零参考面。网格单元为九节点四边形，垂直方向每单位网格长度为 $H/8$ ，水平方向每单位网格长度为 $H/2$ ，在台阶壁面

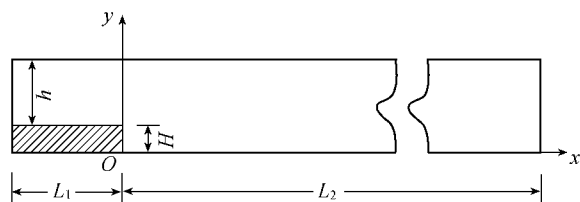


图5 后台阶流的几何构型

附近进行局部网格加密。

5.2.1 流场特征分析

计算时取 $H = 1, h = H, \Delta t = 0.005$ 。图 6 给出了 $Re = 100, 500, 1\,000$ 下流场在 $t = 50$ 时的流线。从图 6(a) 可以看出,低雷诺数下流线平滑,流动稳定,在台阶后方存在唯一回流区;随着雷诺数的增大,顶部出现二次回流区,见图 6(b);当雷诺数继续增

大时,下壁面出现三次回流区,见图 6(c)。文献 [18] 也得到了类似的分析结果,表明本文模型能比较精确地模拟出各种雷诺数下后台阶流的流场特征。

5.2.2 速度曲线对比

为了与 Armaly 等 [19] 的试验结果进行对比,模型的几何参数与文献 [19] 的试验布置完全一致,取 $H = 0.49\text{ cm}, h = 52H/49$ 。图 7、图 8 分别给出了雷

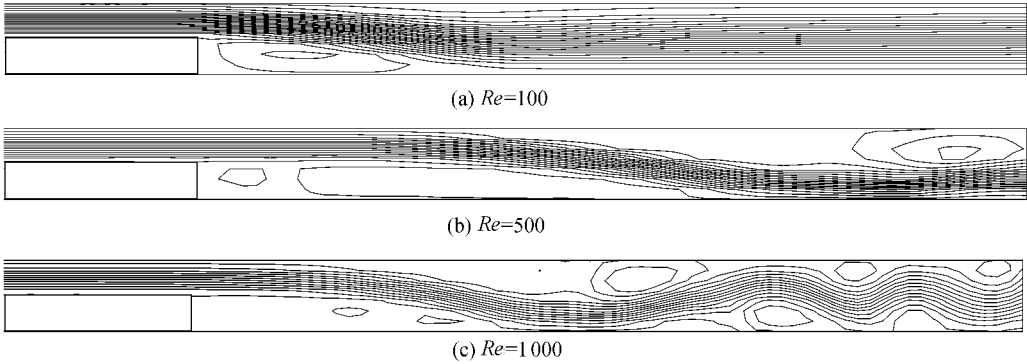


图 6 不同雷诺数下 $t = 50$ 时的流线

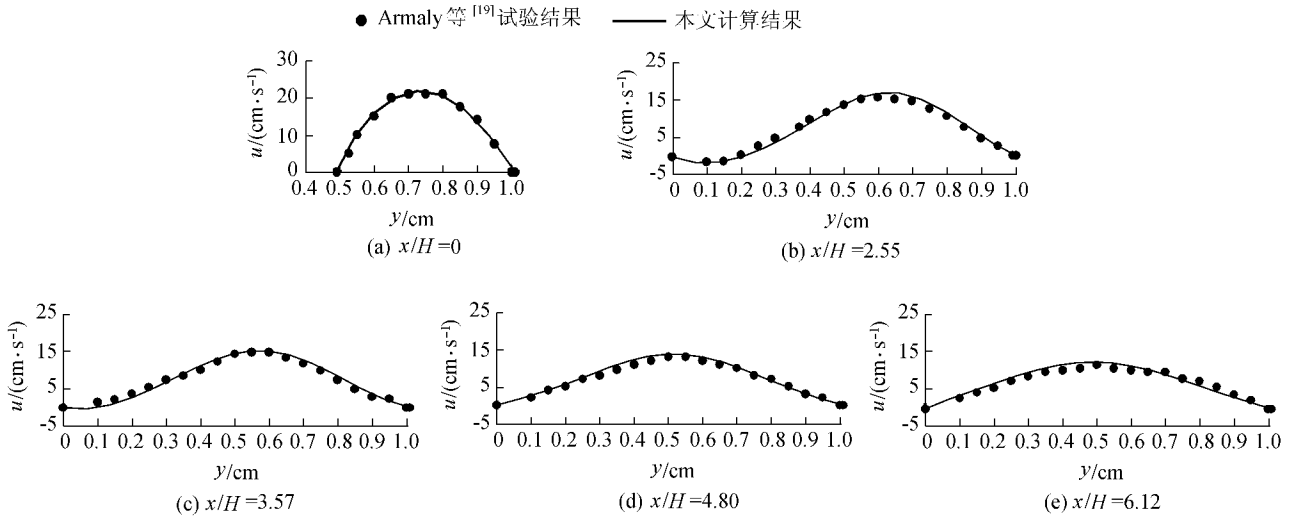


图 7 $Re = 100$ 时水平速度 u 在不同水平位置处沿垂向剖面的分布

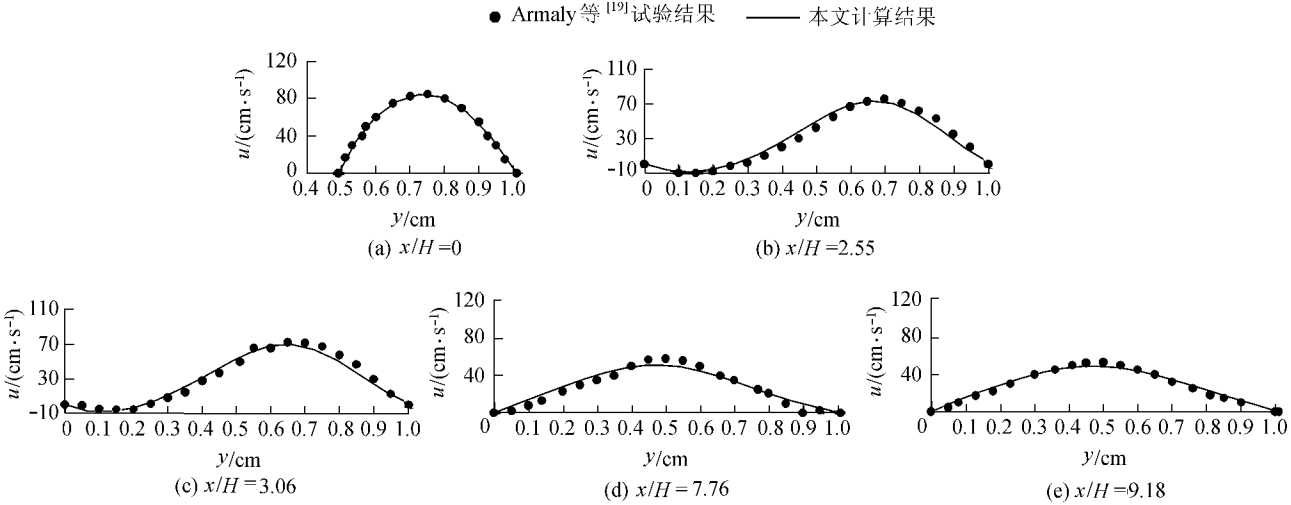


图 8 $Re = 389$ 时水平速度 u 在不同水平位置处沿垂向剖面的分布

雷诺数 $Re = 100$ 389 时水平速度 u 在不同水平位置处沿垂向剖面的分布。

从图 7、图 8 可以看出,当 $Re = 100$ 时,本文计算结果与试验结果吻合很好;当 $Re = 389$ 时,尽管个别地方计算结果与试验结果存在一定的误差,但整体上基本吻合。在计算过程中经过各个断面的流体质量最大误差不超过 3%,基本保持不变,说明数值模型是守恒的。

6 结 语

本文提出了一种新的求解二维非定常黏性不可压缩流体 N-S 方程的算法,即基于最小二乘的 N-S 方程算子分裂有限元法。在每一个时间层上,应用算子分裂技术将 N-S 方程分裂为扩散项和对流项。扩散项采用标准 Galerkin 有限元法,并将其结果作为求解对流项的初值;对流项采用最小二乘有限元法。将对流项与扩散项分开求解,既能考虑对流占优特点又能兼顾方程的扩散性质,同时可以避免在整个计算域求解大规模非线性方程组。对流项采用最小二乘避免了其他有限元法选择权函数的困难。对方腔流进行了数值模拟,计算结果与标准解吻合很好,分析了空间步长和时间步长对数值模拟结果的影响,得出空间步长对计算结果的影响较小,即在较大空间步长情况下也能取得较满意的计算结果。同时对后台阶流也进行了数值研究,描述了不同雷诺数下的流场特征和速度对比曲线,所得计算结果与试验结果吻合较好,表明本文提出的算法具有较好的收敛性和较高的精度。

参考文献:

[1] DOUGLAS J , RUSSELL T F. Numerical methods for convection-dominated diffusion problems based on combining the method of characteristics with finite element or finite difference procedures[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis ,1982 ,19(5) :871-885.

[2] SYLVAIN B , FLORENT C , JEAN-MATE H. A finite volume method to solve the Navier-Stokes equations for incompressible flows on unstructured meshes[J]. Int J Them Science ,2000 , 39 :806-825.

[3] CHRISTIE I , GRIFFITHS D F , MITCHELL A R , et al. Finite element methods for second order differential equations with significant first derivatives[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering ,1976 ,10 :1389-1396.

[4] BROOKS A N , HUNGHERS T J. Streamline upwind/preov Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and

Engineering ,1932 ,3(1/2/3) :199-259.

[5] HUNGHERS T J , FRANCA L P , HULBERT G M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics VIII :the Galerkin least-squares method for advective-diffusive equations [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering ,1989 ,73(2) :173-189.

[6] DONEA J. A Taylor-Galerkin method for convective transport problems[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering ,1984 ,20 :101-119.

[7] 王小华 ,樊洪明 ,何钟怡.后台阶流动的数值模拟[J].计算力学学报 ,2003 ,20(3) :361-365.

[8] MORTON K W. Generalised Galerkin methods for hyperbolic problems[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering ,1985 ,53(1/2/3) :847-871.

[9] JIANG C B , KAWAHARA M , KASHIYMA K. A Taylor-Galerkin-based finite element method for turbulent flows[J]. Fluid Dynamic Research ,1992 ,9 :165-178.

[10] ZIENKIEWICZ O C , TAYLOR R L. The finite element method :fluid dynamics[M]. 5th edition. Oxford :Butterworth Heinemann 2000.

[11] YANENKO N N. The method of fractional steps[M]. Berlin : Springer-Verlag ,1971.

[12] YING Long-an. Viscosity splitting method in bounded domains [J]. Science in China :Series A ,1989 ,33(8) :908-921.

[13] 曹志先 ,魏良琰.用算子分裂法解 Burgers 方程[J].武汉水利水电学院学报 ,1991 ,24(2) :193-201.

[14] WANG Da-guo , WANG Hai-jiao , XIONG Ju-hua , et al. Characteristic-based operator-splitting finite element method for Navier-Stokes equations[J]. Science in China :Series E , 2011 ,54(8) :2157-2166.

[15] 李庆扬 ,王能超 ,易大义.数值分析[M].4 版.北京 :清华大学出版社 ,2001.

[16] 章本照.流体力学中的有限元方法[M].北京 :机械工业出版社 ,1984.

[17] GHIA U , GHIA K N , SHIN C T. High- Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method[J]. Journal of Computational Physics ,1982 , 48 :387-411.

[18] 王兵 ,张会强 ,虞建丰 ,等.后台阶分离流动中大涡结构演变的数值模拟[J].力学季刊 ,2003 ,24(2) :166-173.

[19] ARMALY B F , DURST F , PEREIRA J C F , et al. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow[J]. Fluid Mech ,1983 ,127 :473-496.

(收稿日期 :2011-12-14 编辑 :骆超)

