

空间复合型裂纹的性能参数

邵兵,王向东,刘梦和

(河海大学力学与材料学院,江苏 南京 210098)

摘要:为了进行空间复合型裂纹的应力强度因子 K 与应变能释放率 G 的关系研究,应用断裂力学理论,基于最大主应变准则对 I 型裂纹、III 型裂纹以及空间复合型裂纹的扩展进行理论分析,应用主应变下的空间复合型裂纹开裂断裂准则推导出 I-III 复合型裂纹 K 与 G 的关系式,并利用有限元软件 ANSYS 对关系式进行验证。结果表明,该关系式计算结果与有限元软件的计算结果吻合较好,相对误差在允许范围内。

关键词:最大主应变准则;应力强度因子;应变能释放率;I-III 复合型裂纹

中图分类号:TV313 **文献标志码:**A **文章编号:**1006-7647(2012)05-0052-04

Study on performance parameters of spatial mixed mode crack//SHAO Bing, WANG Xiangdong, LIU Menghe (College of Mechanics and Materials, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: Based on the maximum principal stress criterion, propagation of the mode I crack, mode III crack, and spatial mixed mode crack were theoretically analyzed using fracture mechanics theory. Then, the relationship between the stress intensity factor K and strain energy release rate G was studied. A formula that relates K to G for mixed mode cracks I-III was established based on the fracture criterion of the spatial mixed mode crack under principal strain. By comparing results of the formula with that of the finite element software ANSYS, it was determined that the former was in accordance with the latter.

Key words: maximum principal stress criterion; stress intensity factor; strain energy release rate; mixed mode cracks I-III

断裂力学是研究含缺陷或裂纹的物体在外界条件(荷载、温度、介质腐蚀、中子辐射等)作用下的一门学科,主要涉及宏观裂纹的扩展、失稳开裂、传播和止裂规律及强度条件等方面^[1-2]。裂纹有 3 种:张开型裂纹(I 型)、滑开型裂纹(II 型)和撕开型裂纹(III 型)。在断裂力学的应用中,应力强度因子和应变能释放率是判断含裂纹构件的断裂或计算裂纹扩展速率的两个重要参数,目前国内外的学者对单一型裂纹的这两个参数之间的关系已有了较成熟的研究。本文主要对 I-III 复合型裂纹的应力强度因子和应变能释放率之间的关系进行推导。

I-III 复合型裂纹问题为空间问题,比平面裂纹问题复杂,且可能伴有分支裂纹。本文在研究过程中略去分支裂纹的影响,在这种情形下通过计算分析可知 I 型裂纹和 III 型裂纹的开裂互不影响,因此在分析 I-III 复合型裂纹时可以将过程简化。从断裂力学理论入手^[3-4],基于最大主应变准则对 I 型裂

纹、III 型裂纹以及 I-III 复合型裂纹的扩展进行理论分析,根据已有的单一型裂纹应力强度因子 K 和应变能释放率 G 的关系,应用主应变下的复合型裂纹开裂断裂准则推导出 I-III 复合型裂纹 K 与 G 的关系式,并应用有限元软件 ANSYS 对该关系式进行验证。

1 复合型裂纹的理论基础

由弹性力学平面问题可知 I 型裂纹尖端附近的应力场和位移场为

$$\left\{\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_z &= \begin{cases} \nu(\sigma_x + \sigma_y) & \text{平面应变状态} \\ 0 & \text{平面应力状态} \end{cases} \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \tau_{xz} &= \tau_{yz} = 0\end{aligned}\right. \quad (1)$$

$$\begin{cases} u_x = \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2k-1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ u_y = \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2k+1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right] \end{cases} \quad (2)$$

式中: r 为裂纹尖端附近点的极坐标; θ 为开裂角; u_x, u_y, u_z 为位移分量; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ 为应力分量; μ 为剪切弹性模量; ν 为泊松比; k 为关于泊松比的关系式, 平面应变状态时 $k=3-4\nu$, 平面应力状态时 $k=\frac{3-\nu}{1+\nu}$; K_I 为 I 型裂纹的应力强度因子。

III 型裂纹尖端附近的应力场和位移场为

$$\begin{cases} \tau_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \\ \tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} u_z = \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \\ u_x = u_y = 0 \end{cases} \quad (4)$$

式中: K_{III} 为 III 型裂纹的应力强度因子。

由最大主应变准则可确定裂纹的开裂角^[5], 主应变 ε_1 表达式为

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \frac{1+\nu}{8E} \{ & f_1(\theta) K_I + f_2(\theta) K_{II} + [f_1(\theta) K_I]^2 + \\ & [f_2(\theta) K_{II}]^2 + 2f_1(\theta) f_2(\theta) K_I K_{II} + [f_3(\theta) K_{III}]^2 \} \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $f_1(\theta) = (2\lambda - 3) \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2}$

$$f_2(\theta) = (3 - 2\nu) \sin \frac{\theta}{2} - 3 \sin \frac{3\theta}{2}$$

$$f_3(\theta) = 8 \cos \frac{\theta}{2}$$

式中: E 为弹性模量; λ 为关于泊松比的关系式, 平面应变状态时 $\lambda=3-4\nu$, 平面应力状态时 $\lambda=\frac{3-\nu}{1+\nu}$; K_{II} 为 II 型裂纹的应力强度因子。

由式(5)可知, 当 $K_{II}=K_{III}=0$ 时, I 型裂纹的开裂角为零; 当 $K_I=K_{II}=0$ 时, III 型裂纹的开裂角为零; 当 $K_{II}=0$ 时, 主应变

$$\varepsilon_1 = \frac{1+\nu}{8E} \{ f_1(\theta) K_I + [f_1(\theta) K_I]^2 + [f_3(\theta) K_{III}]^2 \} \quad (6)$$

根据最大主应变准则 $\frac{d\varepsilon_1}{d\theta} = 0, \frac{d^2\varepsilon_1}{d\theta^2} < 0$, 可求得 I-III 复合型裂纹的开裂角为零。由以上开裂角均为零可以判断出 I 型和 III 型单一型裂纹的开裂和 I-III 复合型裂纹的开裂在平面应力状态下都沿着原裂纹方向开裂^[6]。

2 III 型裂纹 K 与 G 的关系公式推导

在断裂力学领域对 I 型裂纹 K 与 G 的关系已有较成熟的表达式^[4]:

$$G_I = \begin{cases} \frac{1}{E} K_I^2 & \text{平面应力状态} \\ \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2 & \text{平面应变状态} \end{cases} \quad (7)$$

对 III 型裂纹的 K 与 G 的关系推导较少, 本文以 I 型裂纹的结果为基础推导 K_{III} 与 G_{III} 的关系。如图 1 所示, 设一无限宽大板, 中心有初始缝长 $2a$ 的 III 型裂纹, 受与 xOz 面平行且沿 z 轴方向的剪应力 τ_{yz} 作用。III 型裂纹在开裂方向扩展的一微小长度 Δb 所做的功为

$$W_{III} = \int_0^{\Delta b} \frac{1}{2} \tau_{yz} 2u_z B dz = B \int_0^{\Delta b} \tau_{yz} u_z dz \quad (8)$$

式中: B 为板厚。

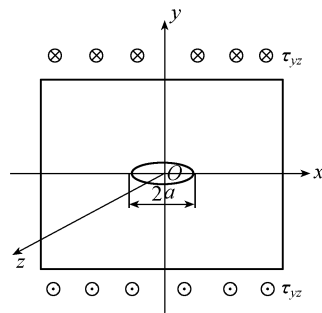


图 1 III 型裂纹

III 型裂纹开裂过程中闭合单位面积所做的功等于裂纹扩张单位面积所释放的能量, 因此得 III 型裂纹的应变能释放率:

$$G_{III} = \frac{1}{B\Delta b} W_{III} = \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 \quad (9)$$

3 I-III 复合型裂纹 K 与 G 的关系公式推导

如图 2 所示, 设一无限宽大板, 中心有初始缝长 $2a$ 的裂纹, 受双轴拉应力 σ 和与 xOz 面平行且沿 z 轴方向的剪应力 τ_{yz} 作用。

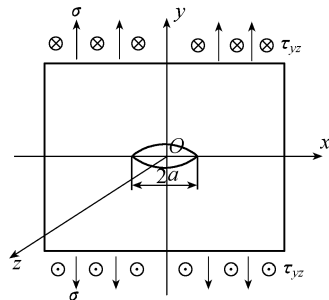


图 2 I-III 复合型裂纹

由于 I-III 复合型裂纹沿着原裂纹方向开裂, 根

据线弹性断裂力学理论^[7-9], I-Ⅲ复合型裂纹在应力作用下的总功 $W_{I-Ⅲ} = W_I + W_{Ⅲ} + W$, 其中 W 为 I 型裂纹的应力在 Ⅲ型裂纹位移上所做的功, 由公式(1)知在平面应力情况下 $\sigma_z = 0$, 由公式(4)知 $u_x = u_y = 0$, 所以 $W = 0$ 。

3.1 I-Ⅲ复合型裂纹中 I 型裂纹的应力做功 W_I

设原长为 a 的 I 型裂纹在开裂方向扩展的一微小长度 Δa , 如图 3 所示(图中 $u_y(x)$ 为位移分量)。在裂纹扩展过程中释放出来的能量可由其逆过程应力所做的功来计算。闭合时作用在裂纹表面上的应力由图 3(b) 中的零值逐渐增加到图 3(a) 中的 $\sigma_y(x)$ 。由应力场公式(1)可知当 $r=x, \theta=0$ 时有

$$\sigma_y(x) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}} \tag{10}$$

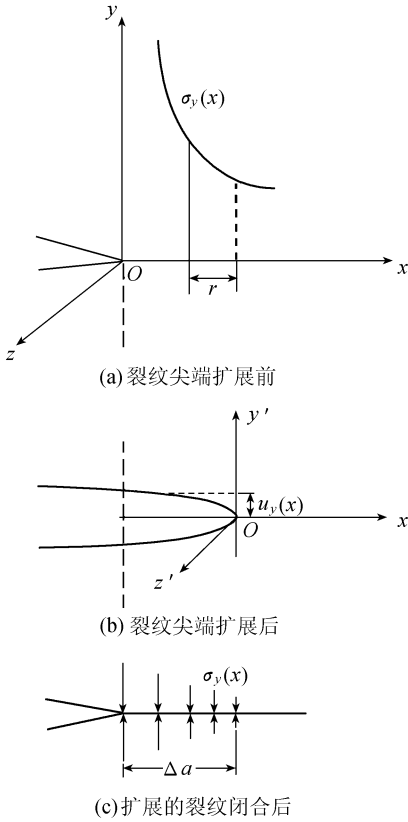


图 3 裂纹扩展长度为 Δa 时的示意图

由图 3(b) 可看出, 扩展的裂纹闭合时的位移最初为 $u_y(r, \theta)$, 其中 $r = \Delta a - x, \theta = \pi$ (图 3(a) 和 (b) 中坐标原点不同), 代入位移场的公式(2)得

$$u_y(\Delta a - x, \pi) = \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{\Delta a - x}{2\pi}} (2k + 2) \tag{11}$$

扩展的裂纹闭合后位移为零。在此过程中面元素 $\Delta b dx$ (由于略去分支裂纹的影响, Δb 为 Ⅲ型裂纹在其 xOz 面开裂方向所扩展的长度) 上作用的应力由 0 增加到 σ_y , 扩展的裂纹闭合时应力在 Δa 段所做的功为

$$W_I = \int_0^{\Delta a} \frac{1}{2} \sigma_y 2u_y \Delta b dx = \Delta b \int_0^{\Delta a} \sigma_y u_y dx \tag{12}$$

3.2 复合型裂纹中 Ⅲ型裂纹的应力做功 $W_{Ⅲ}$

与 I 型裂纹同理, 在裂纹的扩展与闭合过程中面元素 $\Delta a dz$ (Δa 为 I 型裂纹在其开裂方向所扩展的长度) 上作用的应力由 0 增加到 τ_{yz} , 扩展的裂纹闭合时应力在 Δb 段所做的功为

$$W_{Ⅲ} = \int_0^{\Delta b} \frac{1}{2} \tau_{yz} 2u_z \Delta a dz = \Delta a \int_0^{\Delta b} \tau_{yz} u_z dz \tag{13}$$

由公式(6)、(12) 和 (13) 可推导出 I-Ⅲ复合型裂纹的应变能释放率为

$$G_{I-Ⅲ} = \frac{1}{\Delta a \Delta b} W_{I-Ⅲ} = \frac{1}{\Delta a \Delta b} W_I + \frac{1}{\Delta a \Delta b} W_{Ⅲ} = \frac{1}{\Delta a \Delta b} \Delta b \int_0^{\Delta a} \sigma_y u_y dx + \frac{1}{\Delta a \Delta b} \Delta a \int_0^{\Delta b} \tau_{yz} u_z dz \tag{14}$$

再由公式(7)、(8)、(9) 和 (14) 可得 I-Ⅲ复合型裂纹 K 与 G 的关系式为

$$G_{I-Ⅲ} = \frac{1}{E} K_I^2 + \frac{1 + \nu}{E} K_{Ⅲ}^2 \tag{15}$$

4 I-Ⅲ复合型裂纹 K 与 G 关系式的理论验证

由式(15) 可知, 对 I 型裂纹, $K_{Ⅲ} = 0, \theta = 0$ 时有

$$G_I = \frac{1}{E} K_I^2 \tag{16}$$

对 Ⅲ型裂纹, $K_I = 0, \theta = 0$ 时有

$$G_{Ⅲ} = \frac{1 + \nu}{E} K_{Ⅲ}^2 \tag{17}$$

即 I-Ⅲ复合型裂纹 K 与 G 的关系式可以简化为单一型裂纹的关系式, 从理论上验证了式(15) 的正确性。

5 I-Ⅲ复合型裂纹 K 与 G 关系式的有限元验证

取一带中心裂纹的有限宽板, 板厚 0.25 m, 裂纹长 2 m, 板的长和宽均为 10 m, 材料的弹性模量为 30 MPa, 泊松比为 0.3。加载单向拉伸应力和沿 z 方向的剪应力都为 100 Pa。根据对称性, 有限宽板只考虑 1/4 建立模型^[10], 利用有限元软件 ANSYS 划分网格如图 4 所示。

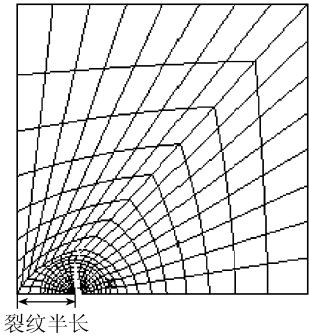


图 4 有限宽板模型的有限元网格

通过有限元软件 ANSYS 计算得出有限宽板模型的应力强度因子 $K_I = 4\,594.1 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{1/2}$; $K_{III} = 6\,123.3 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{1/2}$, J 积分的数值为 2.54。

在线弹性情况下 J 积分等于应变能释放率^[2], 即 $G = 2.54 \text{ Pa} \cdot \text{m}$, 将 K_I 和 K_{III} 的值代入公式 (15) 可得 $G_{I-III} = 2.33 \text{ Pa} \cdot \text{m}$ 。

公式 (15) 计算结果与有限元软件计算结果的相对误差为 8.2%, 考虑到所取的几何模型为有限宽板, 并非无限宽大板且 ANSYS 中的约束会稍微影响到物体的固有模态分布, 所以 8.2% 的相对误差可以认为在允许范围内。从而 I-III 复合型裂纹的 K 与 G 关系式的正确性得到有限元验证。

6 结 语

从断裂力学理论出发, 基于最大主应变准则以 I 型裂纹的 K 与 G 关系为基础, 进行了 III 型裂纹 K 与 G 的关系推导, 并在假设分支裂纹趋近于零的情形下对 I-III 复合型裂纹的 K 和 G 关系式进行推导和分析, 并利用有限元软件对关系式进行验证。

由于 I-III 复合型裂纹是空间问题, 仅利用最大主应变准则和有限元软件进行验证是不够的, 还有许多方面有待做进一步的研究。

参考文献:

[1] 徐道远. 坝体混凝土损伤-断裂模型[J]. 大连理工大学

(上接第 46 页)

参考文献:

- [1] 杨广庆. 二灰改良土在高速铁路路基中的应用研究[J]. 粉煤灰综合利用, 2001(6): 28-31.
- [2] 黄婉荣, 郭志平. 填埋场压实黏土衬垫渗透系数的影响因素综述[J]. 水利水电科技进展, 2001, 21(2): 19-21.
- [3] 洪宝宁, 胡昕, 周宇泉, 等. 三轴应力下黏性土微细结构试验[J]. 水利水电科技进展, 2006, 26(6): 47-50.
- [4] 刘敬辉. 岩土体微细结构定量分析及试验方法研究[D]. 南京: 河海大学, 2003.
- [5] DUDOIGNON P, PANTET A, CARRARA L, et al. Macro-micro measurement of particle arrangement in sheared kaolinitic matrices[J]. Geotechnique, 2001, 51(6): 493-499.
- [6] BENSON C H, TRAST J M. Hydraulic conductivity of thirteen compacted clay[J]. Clays and Clays Minerals, 1995, 43(6): 669-681.
- [7] 徐永福, 兰守奇, 孙德安, 等. 一种能测试应力状态对非饱和土渗透系数影响的新型试验装置[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(1): 160-164.

学报, 1997, 37(1): 1-6.

- [2] 程新, 赵树山. 断裂力学[M]. 北京: 科学出版社, 2006: 31-40.
- [3] 吴力宁, 刘金喜. 各向异性材料 III 型裂纹问题的基本解[J]. 石家庄铁道学院学报, 1997, 10(4): 84-87.
- [4] 倪新华, 刘协权, 马英忱. I-III 混合型裂纹相变增韧分析[J]. 内蒙古工业大学学报, 1997, 16(3): 68-72.
- [5] 田常海, 任明法, 陈浩然. 复合型裂纹脆断主应变因子准则[J]. 大连理工大学学报, 2001, 41(2): 139-143.
- [6] KOO J M, CHOY Y C. A new mixed mode fracture criterion: maximum tangential strain energy density criterion[J]. Engin Fract Mech. 1991, 39(3): 433-449.
- [7] HEO S P, YANG W H. Mixed-mode stress intensity factors and critical angles of cracks in bolted joints by weight function method[J]. Archive of Applied Mechanics, 2002, 72(2): 96-106.
- [8] KRISHNAN G R, ZHAO X L, ZAMAN M, et al. Fracture toughness of a soft sandstone[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and Geomechanics Abstracts, 1998, 35(6): 695-710.
- [9] 周晓军, 鲜学福, 尹光志. 岩石 III 型裂纹尖端应力场及塑性区的研究[J]. 西部探矿工程, 1997, 9(4): 38-40.
- [10] BUCHHOLZ F G, CHERGUI A, RICHARD H A. Fracture analyses and experimental results of crack growth under general mixed mode loading conditions[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2004, 71(4): 455-468.

(收稿日期: 2011-12-28 编辑: 周红梅)

- [8] 胡瑞林, 李向全, 官国琳, 等. 黏性土微观结构定量模型及其工程地质特征研究[M]. 北京: 地质出版社, 1995.
- [9] 胡昕, 洪宝宁, 周宇泉. 三轴应力下黏性土的微结构及其演化规律[J]. 中国铁道科学, 2007, 28(3): 6-11.
- [10] 胡昕, 洪宝宁, 周宇泉, 等. 三轴压缩条件下黏性土微细结构随荷载变化动态调整的定量研究[J]. 四川大学学报: 工程科学版, 2006, 38(6): 57-62.
- [11] 洪宝宁, 刘鑫. 土体微细结构理论与试验[M]. 北京: 科学出版社, 2010.

(收稿日期: 2011-10-31 编辑: 骆超)

