

蛋形断面隧洞临界水深的简易算法

滕 凯

(齐齐哈尔市水务局,黑龙江 齐齐哈尔 161006)

摘要:蛋形断面临界水深计算需完成表达形式复杂且分3个区段给出的超越方程求解,针对解析法无法直接完成求解而采用常规的试算法计算工作量大、效率低、不便实际应用等问题,依据优化拟合理论,以标准剩余差最小为目标函数,在工程适用参数范围内,经拟合计算得到了一个表达形式简单直观、计算不分区段、便于实际应用的通用简化公式。精度分析及实例计算结果表明,该公式最大计算误差仅为0.649%,利用该公式完成蛋形断面临界水深计算可大大简化计算过程,提高工作效率。

关键词:过水隧洞;蛋形断面;临界水深;优化拟合;近似计算

中图分类号:TV131.4 **文献标志码:**A **文章编号:**1006-7647(2013)06-0037-03

Simple algorithm for the critical depth of an egg-shaped section water tunnel//TENG Kai (*Qiqihar Municipal Water Affairs Bureau, Qiqihar 161006, China*)

Abstract: A transcendental equation which has a complex expression form needs to be solved in three sub-sections in order to calculate the critical depth of an egg-shaped cross section. The equation can not be solved directly by an analytical method and the conventional trial method has the drawbacks of heavy computational effort, low efficiency and inconvenience for practical applications. Based on the optimal fitting theory, an objective function was chosen for the smallest standard residual difference. By fitting computation confined to suitable parameters in engineering, a general approximation formula was proposed. The formula has a simple expression, no sub-sections for calculation, easy for practical application. Precision analysis and computational results show that the maximum fitting error is only 0.649% and the process for critical depth calculation of an egg-shaped cross section can be greatly simplified, and the working efficiency can be improved significantly.

Key words: water tunnel; egg-shaped cross section; critical depth; optimal fitting; approximate calculation

相比马蹄形、门洞形、圆形及矩形等其他断面,蛋形断面具有受力条件好、防淤积能力强(小流量时与其他断面比较流速相对较大)、适应水位变幅空间大、便于工程维修养护等优点,是城市排水工程的最佳断面形式,但由于蛋形断面施工难度相对较大,在一定程度上影响了实际工程推广应用。随着近几年机械化施工技术工艺及工艺的不断改进,使蛋形断面有了广阔的发展空间^[1-2],因此有理由相信,蛋形断面将在未来的输配水工程中发挥越来越重要的作用。

由于蛋形断面的几何图形是由不同半径的4段圆弧曲线连接而成,断面形式相对复杂,由此求得的水力要素被划分为3个区间给出,且属超越方程,因此该种断面的临界水深计算既涉及公式分段又需完成超越方程计算,无法由解析法直接求解。常规的试算法^[3]由于公式形式复杂,大量的重复计算不但

容易出错而且效率低、精度差,不便实际应用,利用微机编程求解又不便实际工作;而截至目前,用一个简化近似计算公式表示及解算蛋形断面临界水深的研究尚未见文献报道。

针对现有计算方法存在的问题,本文应用优化拟合理论,取目标函数收敛于剩余差最小^[4-6],通过对多组备选函数多条路径的搜索逼近,在工程适用参数范围内,获得了一个十分简捷、直观且便于实际应用的简化表达通式,具有实际推广价值。

1 临界水深的基本计算公式

依据水力学原理^[7],当水深为临界水深时,发生在该断面的单位比能最小,其基本计算公式为

$$\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{A^3}{B} \tag{1}$$

作者简介:滕凯(1957—),男,黑龙江齐齐哈尔人,高级工程师,主要从事水利防灾减灾及工程优化设计研究。E-mail:tengkai007@163.com

式中: Q 为设计流量, m^3/s ; B 为水面宽度, m ; A 为过水断面面积, m^2 ; g 为重力加速度, m/s^2 ; α 为流速分布不均匀系数, 通常取为 1.0。

1.1 蛋形断面水力要素

蛋形过水断面(图1)是由半径分别为 $0.5r$ 、 r 及 $3r$ (r 为顶弧半径)的4段圆弧曲线构成的封闭式复合断面, 根据断面形式, 如取无量纲水深为 x ($x = \frac{h}{3r}$, h 为洞内水深), 当 $0 \leq x < \frac{1}{15}$ 、 $\frac{1}{15} \leq x < \frac{2}{3}$ 、 $\frac{2}{3} \leq x \leq 1$ 时, 其水力要素分别为

$$\begin{cases} A = 0.125r^2(\theta_1 - \sin \theta_1) \\ B = r\sin \frac{\theta_1}{2} \\ \theta_1 = 2\arccos(1 - 6x) \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} A = r^2[3.02333 - 9\theta_2 - (3\cos \theta_2 - 2) \cdot (3\sin \theta_2 - 2\tan \theta_2) + 4\tan \theta_2] \\ B = 2r(3\cos \theta_2 - 2) \\ \theta_2 = \arcsin\left(\frac{2}{3} - x\right) \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} A = r^2[4.59413 - 0.5(\theta_3 - \sin \theta_3)] \\ B = 2r\sin \frac{\theta_3}{2} \\ \theta_3 = 2\arccos(3x - 2) \end{cases} \quad (4)$$

$$k = \frac{3.023 - 9\arcsin\left(\frac{2}{3} - x\right) - \left\{3\cos\left[\arcsin\left(\frac{2}{3} - x\right)\right] - 2\right\}\left\{2 - 3x - 2\tan\left[\arcsin\left(\frac{2}{3} - x\right)\right] + 4\tan\left[\arcsin\left(\frac{2}{3} - x\right)\right]\right\}}{\left\{2\left[3\cos\left(\arcsin\left(\frac{2}{3} - x\right)\right) - 2\right]\right\}^{\frac{1}{3}}}$$

$$k = \frac{4.59413 - 0.5\{2\arccos(3x - 2) - \sin[2\arccos(3x - 2)]\}}{\{2\sin[\arccos(3x - 2)]\}^{\frac{1}{3}}}$$

在实际工程中, 因 k 值可依据已知的 Q 及 r 求得, 根据 k 值所在区间, 在式(6)~(8)中选取相应的计算公式通过非解析法即可完成无量纲水深 x 的求解, 并由下式计算临界水深:

$$h_k = 3rx \quad (9)$$

由式(6)~(8)可见, 就数学意义而言, 无量纲水深 x 的值域应为 $[0, 1]$, 而对于过水隧洞工程, $x < 0.05$ 时实际应用意义不大; 另一方面, DL/T5195—2004《水工隧洞设计规范》^[8] 规定, 洞内水面线以上空间不宜小于隧洞断面面积的 15%, 且净高不应小于 0.4 m, 据此可得 $x < 0.82$, 即在一般情况下, 洞内最大正常水深所对应的 x 应小于或等于 0.82, 而在低流速恒定流情况下, 临界水深应小于正常水深。考虑上述实用条件, 本文取 x 的值域为 $[0.05,$

式中: θ_i ($i=1, 2, 3$) 分别为蛋形断面在 3 个不同区段水深所对应的圆心角(图2), rad 。

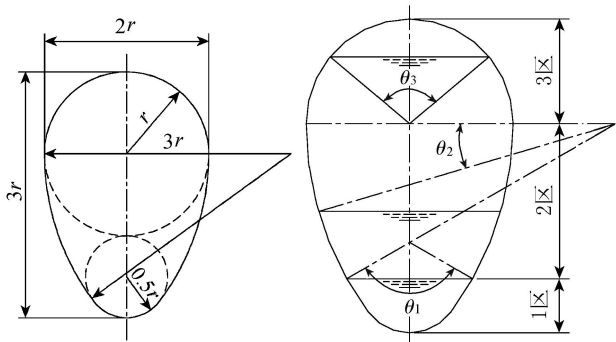


图1 蛋形断面结构 图2 蛋形断面计算示意图

1.2 蛋形断面临界水深计算公式

将式(2)~(4)分别代入式(1), 并设:

$$k = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{gr^5}} \quad h_k = h \quad (5)$$

式中: k 为已知无量纲综合参数; h_k 为蛋形断面的临界水深, m 。经整理即可得到求解蛋形过水断面无量纲临界水深在 $0 \leq x < \frac{1}{15}$ 、 $\frac{1}{15} \leq x < \frac{2}{3}$ 、 $\frac{2}{3} \leq x \leq 1$ 时的基本公式分别为

$$k = \frac{0.125\{2\arccos(1 - 6x) - \sin[2\arccos(1 - 6x)]\}}{\{\sin[\arccos(1 - 6x)]\}^{\frac{1}{3}}} \quad (6)$$

$$k = \frac{3.023 - 9\arcsin\left(\frac{2}{3} - x\right) - \left\{3\cos\left[\arcsin\left(\frac{2}{3} - x\right)\right] - 2\right\}\left\{2 - 3x - 2\tan\left[\arcsin\left(\frac{2}{3} - x\right)\right] + 4\tan\left[\arcsin\left(\frac{2}{3} - x\right)\right]\right\}}{\left\{2\left[3\cos\left(\arcsin\left(\frac{2}{3} - x\right)\right) - 2\right]\right\}^{\frac{1}{3}}} \quad (7)$$

$$k = \frac{4.59413 - 0.5\{2\arccos(3x - 2) - \sin[2\arccos(3x - 2)]\}}{\{2\sin[\arccos(3x - 2)]\}^{\frac{1}{3}}} \quad (8)$$

0.80], 相应参数 k 的取值范围为 $[0.082, 3.107]$ 。

2 蛋形断面临界水深简化公式及精度分析

2.1 简化公式的建立

由式(6)~(8)可见, 根据已知的参数 k 求解 x 涉及非常繁复的超越方程, 无法直接由解析法求解。为简化求解计算过程, 假定函数 $x_i = f(k)$ ($i=1, 2, 3$) 在工程适用参数范围内(即 $0.05 \leq x \leq 0.80$, $0.082 \leq k \leq 3.107$)可以分别替代式(6)~(8), 依据式(6)~(8)中变量与函数之间的对应关系绘制曲线图, 并根据曲线关系选取多个备选函数, 经分别对各备选函数的优化拟合, 以标准剩余差最小为目标函数^[9-10]:

$$S = \min \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x'_i - x_i)^2}{n-1}} \quad (10)$$

式中: n 为拟合计算的数组数。经逐次逼近及各备选函数的优化比选即可得到如下替代函数:

$$x = 1.497 \sin^{0.775}(0.15k) \quad (11)$$

根据 k 值由式 (11) 即可求得无量纲水深 x , 并由式 (9) 求得临界水深 h_k 。

根据式 (11) 也可在已知蛋形断面临界水深 h_k (即已知 x) 情况下不考虑函数分段问题(如式 (6) ~ (8)) 直接推求出过水流量 Q 的计算公式, 即

$$Q = \sqrt{\frac{gr^5 k^3}{\alpha}} \quad (12)$$

其中 $k = \frac{20}{3} \arcsin(0.594x^{1.29}) \quad (13)$

2.2 简化公式的精度分析

为分析本文简化计算通式 (11) 的拟合精度, 在已确定的参数值域范围内, 即可利用公式 (6) ~ (8) 计算出与 x_i 相对应的 k_i , 再由式 (11) 求得与 k_i 相对应的 x'_i (x'_i 为近似计算值), 根据所求得的 x_i 及 x'_i , 即可由式 (14) 完成公式 (11) 与 3 个分段公式 (6) ~ (8) 的拟合相对误差计算。计算结果见表 1。

$$z_i = \frac{x_i - x'_i}{x_i} \times 100\% \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (14)$$

式中: z_i 为拟合相对误差; i 为拟合计算的第 i 个比较数据。

由表 1 可见, 当无量纲水深 x 的取值在工程适用范围内时, 本文简化公式 (11) 的最大拟合相对误差仅为 0.649%, 平均相对误差仅为 -0.057%, 且有 84% 计算数据的相对误差小于 0.5%。可见, 用式 (11) 实现拟合 3 个区段的计算公式具有较高的替代精度, 可以满足设计精度要求。

3 实例计算

3.1 算例 1

某蛋形断面引水隧洞的设计流量 $Q = 38 \text{ m}^3/\text{s}$, 顶拱的设计半径 $r = 2.5 \text{ m}$, 利用本文简化公式计算隧洞内的临界水深 h_k 值。

根据已知参数即可由式 (5) 求得 $k = 1.146567$, 代入式 (11) 即可求得 $x = 0.381124$, 则可求得临界水深 $h_k = 3rx = 2.858 \text{ m}$ 。

通过微机编程可求得该断面临界水深的精确解为 2.860 m, 本文简化公式的计算相对误差为 0.07%。

3.2 算例 2

例 1 中其他参数不变, 计算当隧洞内的临界水深 $h_k = 5.0 \text{ m}$ 时洞内的通过流量 Q 。

表 1 式 (11) 拟合精度

x_i	k_i	x'_i	$z_i/\%$
0.05	0.082648	0.049836	-0.328
0.08	0.152512	0.080116	0.146
0.10	0.202962	0.099974	-0.026
0.13	0.283624	0.129559	-0.339
0.15	0.340550	0.149275	-0.483
0.18	0.430373	0.178933	-0.593
0.20	0.493047	0.198781	-0.610
0.23	0.590982	0.228677	-0.575
0.25	0.658746	0.248686	-0.526
0.28	0.763877	0.278804	-0.427
0.30	0.836163	0.298941	-0.353
0.33	0.947701	0.329214	-0.238
0.35	1.024026	0.349429	-0.163
0.38	1.141299	0.379780	-0.058
0.40	1.221250	0.400020	0.005
0.43	1.343686	0.430370	0.009
0.45	1.426910	0.450584	0.130
0.48	1.554029	0.480861	0.179
0.50	1.640234	0.501005	0.201
0.53	1.771637	0.531144	0.216
0.55	1.860587	0.551176	0.214
0.58	1.995961	0.581121	0.193
0.60	2.087475	0.601009	0.168
0.63	2.226596	0.630715	0.114
0.65	2.320558	0.650433	0.067
0.68	2.463734	0.679957	-0.006
0.70	2.562361	0.699940	-0.009
0.73	2.715972	0.730503	0.069
0.75	2.822471	0.751302	0.174
0.78	2.989309	0.783258	0.417
0.80	3.106157	0.805190	0.649

由已知参数可求得无量纲水深 $x = \frac{5.0 \text{ m}}{7.5 \text{ m}} = 0.666667$, 代入式 (13) 求得 $k = 2.398545$, 再由式 (12) 即可求出洞内的通过流量 $Q = 114.98 \text{ m}^3/\text{s}$ 。

利用式 (7) 及式 (12) 可求得洞内通过流量的精确解为 $115.05 \text{ m}^3/\text{s}$, 本文简化公式的计算相对误差为 0.06%。

4 结 语

本文采用优化拟合法, 将蛋形过水断面临界水深计算由分段超越方程简化为一个表达形式简单 (仅为一个正弦函数)、具有较高计算精度 (最大相对误差不超过 0.649%) 的简化近似通式, 较好地解决了目前常规算法受公式不连续束缚、求解成果精度差、重复计算工作量大、效率低、不便应用等问题, 不仅使蛋形断面隧洞工程临界水深计算变得更加简洁、直观, 而且也为解决类似复杂过水断面隧洞工程水力计算的简化提供了一种有效而实用的计算方法, 具有一定的理论及实用意义。

(下转第 47 页)

Journal of Irrigation and Drainage,2004,23(1):14-20. (in Chinese))

[3] 彭世彰,艾丽坤. 提高灌溉水利用系数,保障国家粮食安全[J]. 水资源保护,2012,28(3):79-82. (PENG Shizhang, AI Likun. Improving irrigation water use coefficient and ensuring national food and water safety[J]. Water Resources Protection, 2012, 28(3):79-82. (in Chinese))

[4] 陈朱叶,郭相平,姚俊琪. 水稻蓄水控灌的节水效应[J]. 河海大学学报:自然科学版,2011,39(4):426-429. (CHEN Zhuye, GUO Xiangping, YAO Junqi. Water-saving effect of water-catching and controllable irrigation technology of rice[J]. Journal of Hohai University: Natural Sciences, 2011, 39(4):426-429. (in Chinese))

[5] 黄俊友. 水稻节水灌溉与雨水利用[J]. 中国农村水利水电,2005(7):11-12. (HUANG Junyou. Utilization of rainfall and rice water-saving irrigation [J]. China Rural Water and Hydropower, 2005(7):11-12. (in Chinese))

[6] 徐俊增,彭世彰,丁加丽,等. 控制灌溉的水稻气孔限制值变化规律实验研究[J]. 水利学报,2006,37(4):486-491. (XU Junzeng, PENG Shizhang, DING Jiali, et al. Stomata limitation of rice under control irrigation [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2006, 37(4):486-491. (in Chinese))

[7] 郭相平,袁静,郭枫,等. 水稻蓄水-控灌技术初探[J]. 农业工程学报,2009,25(4):70-73. (GUO Xiangping, Yuan Jing, Guo Feng, et al. Preliminary study on water-catching and controlled irrigation technology of rice [J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering, 2009, 25(4):70-73. (in Chinese))

(收稿日期:2012-11-26 编辑:熊水斌)

(上接第 28 页)

[10] 齐璞,孙赞盈,侯起秀,等. 黄河洪水的非恒定性对输沙及河床冲淤的影响[J]. 水利学报,2005,36(6):637-643. (QI Pu, SUN Zanying, HOU Qixiu, et al. Influence of unsteady floods on sediment transport and riverbed evolution in Yellow River [J]. Journal of Hydraulic Research, 2005, 36(6):637-643. (in Chinese))

[11] 齐璞,姬美秀,孙赞盈. 水库泄空冲刷高含沙水流形成机理[J]. 水利学报,2006,37(8):906-912. (QI Pu, JI Meixiu, SUN Zanying. Formation mechanism of hyperconcentrated sediment flow caused by scouring of reservoir emptying [J]. Journal of Hydraulic Research, 2006, 37(8):906-912. (in Chinese))

[12] 齐璞,曲少军,孙赞盈. 关于优化黄河调水调沙运用方式的建议[J]. 人民黄河,2012(1):5-9. (QI Pu, QU Shaojun, SUN Zanying. Suggestion on optimizing flow and sediment regulations as the operational methods of the Xiaolangdi Reservoir [J]. Yellow River, 2012(1):5-9. (in Chinese))

[13] 齐璞,孙赞盈,齐宏海. 再论黄河下游游荡河道双向整治方案[J]. 泥沙研究,2011(3):1-9. (QI Pu, SUN Zanying, QI Honghai. Research on two-bank training strategy for wandering channels of Lower Yellow River [J]. Journal of Sediment Research, 2011(3):1-9. (in Chinese))

(收稿日期:2012-12-14 编辑:骆超)

(上接第 39 页)

参考文献:

[1] 傅功年,唐耿红. 冉铺湾隧洞衬砌断面型式选择[J]. 人民长江,2002,33(5):14-16. (FU Gongnian, TANG Genghong. Ran ping bay tunnel lining section type selection [J]. Yangtze River, 2002, 33(5):14-16. (in Chinese))

[2] 王子宜. 蛋形衬砌在白莲灌区武家坳隧洞中的应用[J]. 湖南水利水电,2006(6):70-71. (WANG Zhiyi. Application of egg-form lining in Wujiaao tunnel of Bailian irrigation area [J]. Hunan Water Resources and Hydropower, 2006(6):70-71. (in Chinese))

[3] 华东水利学院. 水工设计手册[M]. 北京:水利电力出版社,1986.

[4] 谢成玉,滕凯. 抛物线形断面渠道均匀流水深的近似计算公式[J]. 水电能源科学,2012(7):94-95. (XIE Chengyu, TENG Kai. Approximate formula of uniform flow depth for parabolic cross-section channel [J]. Water Resources and Power, 2012(7):94-95. (in Chinese))

[5] 刘刚,滕凯. 梯形断面均匀流水深的近似计算公式[J]. 水利与建筑工程学报,2012(1):41-44. (LIU Gang, TENG Kai. Approximate calculation formula uniform flow depth of trapezoidal cross-section [J]. Journal of Water Resources and Architectural Engineering, 2012(1):41-44. (in Chinese))

[6] 滕凯. 消力池深的简化算法[J]. 人民长江,2012,43(15):77-79. (TENG Kai. Simplified calculation method of depth of stilling basin [J]. Yangtze River, 2012, 43(15):77-79. (in Chinese))

[7] 张志昌. 水力学[M]. 北京:中国水利水电出版社,2011.

[8] DL/T 5195—2004 水工隧洞设计规范[S].

[9] 王慧文. 偏最小二乘回归法及其应用[M]. 北京:国防工业出版社,1999.

[10] 阎凤文. 测量数据处理方法[M]. 北京:原子能出版社,1988.

(收稿日期:2012-11-14 编辑:熊水斌)