

无压流六圆弧蛋形断面临界水深近似算法

滕 凯

(齐齐哈尔市水务局,黑龙江 齐齐哈尔 161006)

摘要:针对六圆弧蛋形断面临界水深常用计算表达式涉及4个分间的分段函数、需求解超越方程、计算工作量大的问题,依据优化拟合理论,以标准剩余差最小为目标函数,在实际工程参数取值范围内,通过对4个分段函数的逼近拟合获得了一个通用的简化近似公式,该公式可使六圆弧蛋形断面临界水深的计算大幅度简化。该公式的精度分析及算例计算结果表明,在工程实用范围内,该公式最大计算相对误差为0.563%,可以满足实际工程的精度要求。

关键词:临界水深;六圆弧蛋形断面;无压过水隧洞;近似计算

中图分类号:TV131.4 **文献标志码:**A **文章编号:**1006-7647(2014)01-0081-04

Approximation algorithm for free flow critical depth of six arcs egg-shaped cross-section//TENG Kai (Qiqihar Municipal Water Affairs Bureau, Qiqihar 161006, China)

Abstract: The critical depth calculation expression for the egg-shaped cross-section with six arcs presents problems as the four piecewise functions, the demand for solution of the transcendental equation and the huge calculation load. Based on the theory of optimal fitting by using a standard minimum remaining difference as objective function, the fitting calculation of four piecewise functions was used to derive a simplified approximate formula within the actual engineering parameters. This simplified formula largely simplifies the calculation process of critical depth for six arcs egg-shaped cross-section. Precision analysis and calculation result for an example show that relative error of this formula is 0.563% within the actual engineering parameters, which satisfies the current engineering accuracy.

Key words: critical depth; egg-shaped tunnel; optimal fitting; approximate calculation

随着水利机械化施工技术及工艺的不断提高,六圆弧蛋形断面因其具有受力条件好、过流能力强、适宜地质条件宽、节省空间及材料等显著特点,越来越广泛地被应用于水力发电、灌溉排水及城市供排水工程中^[1-2]。该断面由6个圆心、3种不同半径的6段连续圆弧曲线构成,几何图形复杂,其无压流临界水深计算不但涉及4个区间的分段函数而且需求解超越方程,常规的解析法不能直接获解,采用试算法^[3-4]计算工作量很大且步骤繁琐,不便实际应用。李若冰等^[5]通过拟合法给出了相应区间的分段近似计算公式,计算过程有所简化,但由于公式分段,实际应用时必须根据事先求得的界限参数选取相应的公式,也不便实际应用,且最大计算误差达1.6%。为解决常规算法及文献[5]推荐方法所存在的问题,本文依据优化拟合原理,通过函数曲线类型分析,在多组备选函数中以标准剩余差最小的函数为目标函数,经逐次逼近拟合计算获得了在实际工程参数取值范围内,用一个计算通式可完成临界

水深求解的简化公式,使计算求解过程更加简捷、直观,便于实际应用。

1 无压流临界水深的基本计算公式

依据水力学原理^[6],当水深为临界水深时,发生在该断面的单位比能最小,其基本计算方程为

$$\frac{\mu Q^2}{g} = \frac{A^3}{B} \tag{1}$$

式中: μ 为流速分布不均匀系数,通常取为1.0; Q 为隧洞的设计过水流量, m^3/s ; g 为重力加速度, m/s^2 ; A 为过水断面面积, m^2 ; B 为水面宽度, m 。

1.1 六圆弧蛋形断面水力要素

六圆弧蛋形断面(图1)由3种不同长度的半径围绕6个圆心绘制出6段连续圆弧曲线,构成蛋形闭合曲线,各圆弧段所对应的圆心角和半径分别为 $2\alpha_1$ 和 r_1 (对应 $\widehat{ab}$)、 α_2 和 r_2 (对应 $\widehat{ef}$)、 α_3 和 r_1 (对应 $\widehat{ce}$ 和 $\widehat{df}$)及 α_4 和 r_3 (对应 $\widehat{ac}$ 和 $\widehat{bd}$)。各参数的关系如下: $r_2 = 0.426\ 042r_1$, $r_3 = 0.303\ 571r_1$, $\alpha_1 = 25.375^\circ$,

作者简介:滕凯(1957—),男,黑龙江齐齐哈尔人,高级工程师,主要从事水利防灾减灾及工程优化设计研究。E-mail:tengkai007@163.com

$$\alpha_2 = 121.1838^\circ, \alpha_3 = 29.4081^\circ, \alpha_4 = 40.1281^\circ.$$

由图 1 的几何关系可以求得图中 $h_1 = 0.096478r_1, h_2 = 0.195651r_1$ 。

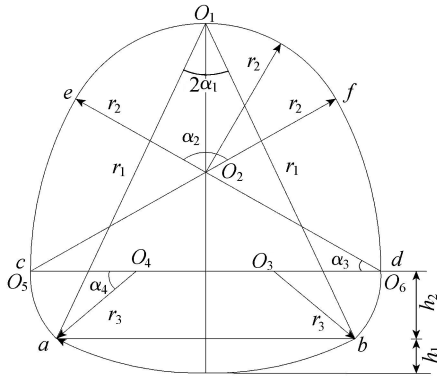


图 1 六圆弧蛋形断面

六圆弧蛋形过水断面的水力要素为^[5]

$$A = \begin{cases} 0.5r_1^2(2\gamma - \sin 2\gamma) & 0 \leq \gamma \leq 25.3750^\circ \\ r_1^2 \{ 0.055681 + 0.092156 \times \\ \quad [\alpha_4 - \beta - \sin(\alpha_4 - \beta)] + \\ \quad (0.624969 + 0.303571 \cos \beta)(0.195651 - \\ \quad 0.303571 \sin \beta) \} & 0 \leq \beta \leq 40.1281^\circ \\ r_1^2(0.2425 + \beta_1 - \sin \beta_1 + \\ \quad \cos \beta_1 \sin \beta_1) & 0 \leq \beta_1 \leq 29.4081^\circ \\ r_1^2 \{ 0.614854 + 0.181512[\beta_2 + \\ \quad 0.5 \sin(\alpha_2 - 2\beta_2)] \} & 0 \leq \beta_2 \leq 60.5919^\circ \end{cases} \quad (2)$$

$$B = \begin{cases} 2r_1 \sin \gamma & 0 \leq \gamma \leq 25.3750^\circ \\ r_1(0.392857 + 0.607143 \cos \beta) & 0 \leq \beta \leq 40.1281^\circ \\ r_1(2 \cos \beta_1 - 1) & 0 \leq \beta_1 \leq 29.4081^\circ \\ 0.852084r_1 \sin(0.5\alpha_2 - \beta_2) & 0 \leq \beta_2 \leq 60.5919^\circ \end{cases} \quad (3)$$

$$k = \begin{cases} 0.5 \{ 2 \arccos(1-x) - \sin[2 \arccos(1-x)] \} \{ 2 \sin[\arccos(1-x)] \}^{-1/3} & 0 \leq x \leq 0.096478 \\ \{ 0.05568 + 0.09216 \{ \alpha_4 - \arcsin(0.96231 - 3.29412x) - \sin[\alpha_4 - \arcsin(0.96231 - 3.29412x)] \} + \\ \quad \{ 0.624969 + 0.303571 \cos[\arcsin(0.962307 - 3.294118x)] \} (x - 0.096478) \} \cdot \\ \quad \{ 0.392857 + 0.607143 \cos[\arcsin(0.962307 - 3.294118x)] \}^{-1/3} & 0.096478 \leq x \leq 0.292129 \\ \{ 0.534629 + \arcsin(x - 0.292129) - x + 0.5 \sin[2 \arcsin(x - 0.292129)] \} \cdot \\ \quad \{ 2 \cos[\arcsin(x - 0.292129)] - 1 \}^{-1/3} & 0.292129 \leq x \leq 0.783156 \\ \{ 0.61485 + 0.18151[0.5\alpha_2 - \arccos(2.34719x - 1.34719)] + 0.5 \sin[2 \arccos(2.34719x - 1.34719)] \} \cdot \\ \quad \{ 0.852084 \sin[\arccos(2.347186x - 1.347186)] \}^{-1/3} & 0.783156 \leq x \leq 1.0 \end{cases} \quad (4)$$

式(6)包含临界水深 4 个取值区间所对应的 4 个超越方程,利用式(6)即可根据已知的 k 值采用相应区间的计算公式计算得到无量纲临界水深 x ,进而求得临界水深 h_k 。式(6)中 x 的取值范围为 4 个连续区间,值域为 $[0,1]$,而在实际工程中,较小的临界水深即 $x < 0.08$ 的情况极为少见;同时,为避免洞内产生不稳定的半有压流,DL/T 5195—2004《水工隧洞设计规

$$h = \begin{cases} r_1(1 - \cos \gamma) & 0 \leq \gamma \leq 25.375^\circ \\ r_1(0.292129 - 0.303571 \sin \beta) & 0 \leq \beta \leq 40.1281^\circ \\ r_1(0.292129 + \sin \beta_1) & 0 \leq \beta_1 \leq 29.4081^\circ \\ r_1 \{ 0.292129 + \sin \alpha_3 + 0.426042 [\cos(0.5\alpha_2 - \beta_2) - \cos(0.5\alpha_2)] \} & 0 \leq \beta_2 \leq 60.5919^\circ \end{cases} \quad (4)$$

式中: h 为洞内水深,m; γ, β, β_1 及 β_2 分别为与 $\alpha_1, \alpha_4, \alpha_3$ 及 α_2 同圆心的不同区段水深所对应的圆心角(图 2),rad。

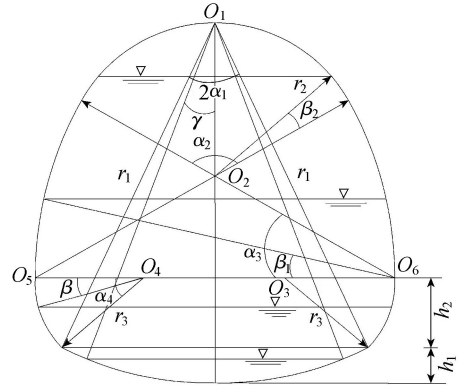


图 2 六圆弧蛋形断面计算图

1.2 六圆弧蛋形断面临界水深基本计算公式

将六圆弧蛋形断面 4 个区段所对应的水力要素(式(2)(3)(4))代入式(1),并设

$$k = \sqrt[3]{\frac{\mu Q^2}{gr_1^5}} \quad h_k = h \quad x = \frac{h_k}{r_1} \quad (5)$$

式中: k 为已知综合参数; h_k 为蛋形断面的临界水深,m; x 为无量纲临界水深。

进一步整理可得六圆弧蛋形断面临界水深的基本计算公式为

范》^[7]规定,洞内水面线以上的富余空间面积不宜小于隧洞断面面积的 15%,且净空高度不应小于 0.4m,由此可以求得在一般情况下,洞内最大正常水深所对应的 $x < 0.775$ 。在低流速恒定流情况下,临界水深应小于正常水深。为使计算公式具有更宽的适用区间,将 x 的取值范围适当外延,确定为 $[0.08, 0.82]$,相应地, k 的取值范围为 $[0.0457, 0.812]$ 。

2 六圆弧蛋形断面临界水深的近似公式及精度分析

2.1 近似公式的建立

式(6)为含有未知量 x 的不连续分段超越方程,无法直接求解。要解决由已知参数 k 直接求解未知量 x 的问题,必须建立不分段通用公式,其次要使公式尽量简化,同时还要有较高的计算精度。为解决这一复杂方程的求解问题,在实际工程参数取值范围内($0.08 \leq x \leq 0.82, 0.0457 \leq k \leq 0.812$),假定函数 $x=f(k)$ 可以替代式(6),依据式(6)即可通过设定不同的 x 求得 k ,并点绘 $x-k$ 关系曲线,见图3。

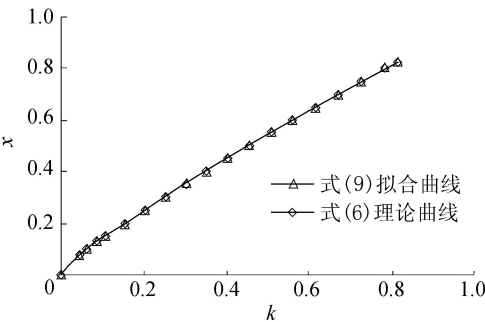


图3 $x-k$ 关系曲线

由图3可见, x 与 k 具有较好的幂函数关系,在兼顾拟合精度高和表达形式简单两个条件下,构造拟合函数为

$$x = A_1 k^y + B_1 \tag{7}$$

式中: A_1 、 B_1 为待定系数; y 为待定指数。

采用数值拟合方法^[8-13],以标准剩余差最小为目标函数,即

$$S_m = \min \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x'_i - x_i)^2}{n - 1}} \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{8}$$

式中: x'_i 为拟合近似值; n 为拟合计算的数组数。

经逐次逼近拟合^[14-15]即可获得式(6)的拟合函数为

$$x = 0.9715 k^{0.888} + 0.0176 \tag{9}$$

利用式(9)即可根据已知的 k 值求解无量纲临界水深 x ,进而完成临界水深 h_k 的计算。根据式(9)不需进行界限判定也可推求出在已知蛋形断面临界水深 h_k 情况下的隧洞过水流量 Q ,即

$$Q = \sqrt{\frac{g r_1^5 k^3}{\mu}} \tag{10}$$

其中 $k = 1.0331(x - 0.0176)^{1.126}$

2.2 近似公式的精度分析

为比较近似公式(9)与由4个分段函数构成的

式(6)的拟合精度,在实际工程参数取值范围内,选取不同的 x_i ,根据 x_i 所在区间代入式(6)即可计算出与之相对应的 k_i ,再将 k_i 代入式(9)求得与之相对应的 x'_i ,进而可绘制由式(9)得出的 $x-k$ 拟合关系曲线(图3),并由式(9)完成近似公式相对误差的计算,计算结果见表1。

$$z_i = \frac{x'_i - x_i}{x_i} \times 100\% \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{11}$$

式中: z_i 为拟合相对误差,%; i 为在拟合计算中所选取的第 i 个数据。

表1 式(9)相对误差计算结果

x_i	k_i	x'_i	$z_i/\%$	x_i	k_i	x'_i	$z_i/\%$
0.08	0.045716	0.080346	-0.432	0.45	0.402448	0.450537	0.119
0.09	0.053454	0.089692	-0.342	0.48	0.433355	0.479939	-0.013
0.10	0.061666	0.099447	-0.553	0.50	0.454068	0.499510	-0.098
0.13	0.088122	0.129977	-0.018	0.53	0.485316	0.528849	-0.217
0.15	0.106199	0.150229	0.153	0.55	0.506279	0.548412	-0.289
0.18	0.133897	0.180535	0.297	0.58	0.537948	0.577796	-0.380
0.20	0.152716	0.200718	0.359	0.60	0.559229	0.597432	-0.428
0.23	0.181419	0.230980	0.426	0.63	0.591446	0.627001	-0.476
0.25	0.200851	0.251158	0.463	0.65	0.613150	0.646819	-0.489
0.28	0.230415	0.281447	0.517	0.68	0.646108	0.676764	-0.476
0.30	0.250376	0.301649	0.215	0.70	0.668394	0.696916	-0.441
0.33	0.280487	0.331022	0.549	0.73	0.702393	0.727514	-0.340
0.35	0.300643	0.351758	0.502	0.75	0.725511	0.748225	-0.237
0.38	0.331000	0.381557	0.410	0.78	0.761019	0.779893	-0.014
0.40	0.351324	0.401335	0.334	0.80	0.785576	0.801697	0.212
0.43	0.381942	0.430892	0.207	0.82	0.811481	0.824616	0.563

由图3及表1可见,在 x 取值范围 $[0.08, 0.82]$ 内,式(9)拟合曲线与式(6)的理论曲线几乎完全重合,用式(9)替代由4个分段函数组成的式(6)后,最大相对正、负误差仅分别为0.563%和-0.553%,且位于常用区域边缘,平均相对误差为0.029%,拟合相对误差小于0.5%的点占总计算点数的84%。由此可见,式(9)具有很高的拟合精度,可以满足实际工程的精度要求。

3 计算实例

选取文献[4]中算例,已知某输水渠道为六圆弧蛋形断面,最大半径 $r_1 = 1.5\text{ m}$,试求当设计流量 $Q = 0.5 \sim 5.5\text{ m}^3/\text{s}$ 时渠道内的相应临界水深 h_k 值。

当 $Q = 0.5\text{ m}^3/\text{s}$ 时,根据已知参数由式(5)求得 $k = 0.149717$,将 k 代入式(9)即可求得无量纲水深 $x = 0.197522$,进一步可求得临界水深 $h_k = r_1 x = 0.2963\text{ m}$ 。由文献[4]可知,该断面临界水深的精确值 $h_k = 0.2953\text{ m}$,则在 $Q = 0.5\text{ m}^3/\text{s}$ 时,式(9)的相对误差为-0.333%。采用同样方法可完成渠道在其他流量情况下的临界水深计算,并进行精度比较,结果见表2。

表 2 临界水深计算结果

$Q/(m^3 \cdot s^{-1})$	精确值/m	计算值/m	误差/%
0.5	0.2953	0.2963	-0.333
1.0	0.4309	0.4332	-0.534
1.5	0.5411	0.5436	-0.456
2.0	0.6381	0.6396	-0.233
2.5	0.7265	0.7262	0.043
3.0	0.8079	0.8059	0.242
3.5	0.8840	0.8804	0.404
4.0	0.9552	0.9507	0.473
4.5	1.0223	1.0174	0.476
5.0	1.0851	1.0812	0.358
5.5	1.1442	1.1424	0.154

由表 2 可见,在上述参数计算范围内,采用式(9)得到的计算值与精确值的最大正、负相对误差分别为 0.476% 和-0.534%,可见,式(9)具有很高的计算精度。

4 结 语

六圆弧蛋形断面由 6 个圆心、3 种不同半径的 5 段连续圆弧曲线构成,几何图形比较特殊,致使临界水深计算公式包含 4 个非常复杂的分段超越方程,采用常规计算方法求解比较困难。本文依据优化拟合理论,通过对 4 个分段函数的逼近拟合,获得了蛋形过水断面临界水深求解的近似计算通式,在实际工程的参数取值范围内不分段,该计算通式形式简单,计算快捷,容易记忆,较好地解决了分段函数求解计算所涉及的诸多问题。该近似计算公式的精度分析及算例计算结果表明,在无量纲临界水深 $0.08 \leq x \leq 0.82$ 范围内,该公式具有很高的计算精度,最大相对误差仅为 0.563%,可以满足实际工程的精度要求。

参考文献:

[1] 傅功年,唐耿红.冉铺湾隧洞衬砌断面型式选择[J].人民长江,2002,33(5):14-16. (FU Gongnian, TANG Genghong. Ranpuwan tunnel lining section type selection [J]. Yangtze River,2002,33(5):14-16. (in Chinese))

[2] 王子宜.蛋形衬砌在白连灌区武家壩隧洞中的应用[J].湖南水利水电,2006(6):70-71. (WANG Ziyi. Application of egg-shaped tunnel lining in the Wujiao tunnel of Bailian irrigation district [J]. Hunan Hydropower,2006(6):70-71. (in Chinese))

[3] 华东水利学院.水工设计手册[M].北京:水利电力出版社,1986.

[4] 武汉水利电力学院水力学教研室.水力计算手册[M].北京:水利电力出版社,1983.

[5] 李若冰,张志昌.明渠六圆弧蛋形断面临界水深和收缩

断面水深的计算[J].武汉大学学报:工学版,2012,45(4):463-467. (LI Ruobing, ZHANG Zhichang. Calculation of critical water depth and contraction water depth in egg-shaped cross-section with six arcs of open channel [J]. Engineering Journal of Wuhan University, 2012,45(4):463-467. (in Chinese))

[6] 张志昌.水力学[M].北京:中国水利水电出版社,2011.

[7] DL/T5195—2004 水工隧洞设计规范[S].

[8] 刘刚,滕凯.梯形断面均匀流水深的近似计算公式[J].水利与建筑工程学报,2012,10(1):41-44. (LIU Gang, TENG Kai. Approximate calculation formula uniform flow depth of trapezoidal cross-section [J]. Journal of Water Resources and Architectural Engineering, 2012, 10(1): 41-44. (in Chinese))

[9] 谢成玉,滕凯.三次抛物线形渠道断面收缩水深的简化计算[J].南水北调与水利科技,2012,10(2):148-150. (XIE Chengyu, TENG Kai. Simplified equation of contracted water depth in a channel having a cubical parzbola section [J]. South-to-North Water Transfers and Water Science & Technology, 2012, 10(2):148-150. (in Chinese))

[10] 谢成玉,滕凯.抛物线形断面渠道均匀流水深的近似计算公式[J].水电能源科学,2012,30(7):94-95. (XIE Chengyu, TENG Kai. Approximate formula of uniform flow depth for parabolic cross-section channel [J]. Water Resources and Power, 2012, 30(7):94-95. (in Chinese))

[11] 滕凯.消力池深的简化算法[J].人民长江,2012,43(15):77-79. (TENG Kai. Simplified calculation method of depth of stilling basin [J]. Yangtze River, 2012, 43(15):77-79. (in Chinese))

[12] 滕凯,周辉.弧底梯形明渠正常水深的简化算法[J].黑龙江八一农垦大学学报,2012,24(5):85-88. (TENG Kai, ZHOU Hui. A method of simplifiing calculayions for the normal water depth of open trapezoidal channel with arc bottom [J]. Journal of Heilongjiang Bayi Agricultural University, 2012, 24(5):85-88. (in Chinese))

[13] 滕凯.标准门洞形过水断面临界水深的简化算法[J].华北水利水电学院学报,2012,33(5):1-3. (TENG Kai. Simpli computation of critical water depth of standard door-shaped waterway tunnel [J]. Journal of North China Institute of Water Conservancy and Hydroelectric Power, 2012, 33(5):1-3. (in Chinese))

[14] 王慧文.偏最小二乘回归法及其应用[M].北京:国防工业出版社,1999.

[15] 阎凤文.测量数据处理方法[M].北京:原子能出版社,1988.

(收稿日期:2013-01-03 编辑:骆超)