

# 蛋形断面无压隧洞水面线解析算法

滕 凯

(齐齐哈尔市水务局,黑龙江 齐齐哈尔 161006)

**摘要:**针对蛋形断面形式复杂,用常规方法完成水面线计算不但存在误差累积而且计算工作量大、效率低的问题,依据优化拟合理论,以标准剩余差最小为目标函数,在工程适用参数范围内,经拟合计算得到了一个简化通用算式来替代原积分中的分段且不可积函数,并推求出了蛋形断面隧洞水面线计算的近似解析通式。拟合误差分析和实例计算结果表明:解析通式的计算误差小于2%;利用近似解析通式完成蛋形断面隧洞水面线计算可使求解过程大幅度简化,工作效率明显提高。

**关键词:**过水隧洞;蛋形断面;水面线;优化拟合;近似计算

**中图分类号:**TV131.4      **文献标志码:**A      **文章编号:**1006-7647(2014)02-0064-04

**Analytical algorithm for water surface profile of free-flow tunnel with egg-shaped cross-section//TENG Kai**  
(Qiqihar Municipal Water Affairs Bureau, Qiqihar 161006, China)

**Abstract:** Egg-shaped cross-sections are complex in form, calculating such water surface profiles with conventional methods has the disadvantages of error accumulation, a large amount of necessary calculation, and low efficiency. To improve the calculation, the optimum matching theory was adopted in this study. An objective function of minimized standard residual deviation was selected, and a simplified general formula was obtained by the fitting calculation, which could be used to substitute for the segmented and non-integrable function in the original integral within the parameter range applicable to projects. Finally, a simplified formula was deduced for calculation of water surface profiles of tunnels with egg-shaped cross-sections. Error analysis and case study show that the calculation error of this calculation is less than 2%. The approximate formula greatly simplifies the water surface profile calculation of tunnels with egg-shaped cross-sections, and the working efficiency is obviously improved.

**Key words:** water tunnel; egg-shaped cross-section; water surface profile; optimum matching; approximation calculation

蛋形断面除具有其他曲线类断面的优点以外,还因该种断面小流量时的流速相对其他断面大,因此自身的防淤积特性明显,是城市排水工程中应用较广泛的断面形式之一。由于隧洞工程受进、出口连接建筑物过流条件的限制,洞内多发生恒定渐变流壅水或降水水面曲线,因此,在该类工程设计与运行管理工作中,经常要通过水面线计算确定洞内某些特定位置或某一指定区段的水位高程(洞内水深)。由于蛋形断面的水力要素的表达式为通过3个区间给出的不连续超越方程,加之恒定渐变流水面线计算方程复杂及隐含,致使目前工程上采用的分段求和差分试算法<sup>[1-2]</sup>、迭代法<sup>[3-4]</sup>及图解法<sup>[5-6]</sup>的计算过程变得更加繁复,而且人们公认的误差累积也无法得到消除。

针对常规方法求解蛋形断面隧洞水面线存在的问题,本文采用优化拟合方法,分别对水面线计算公

式中的分段超越函数进行优化拟合替代,取目标函数为标准剩余差最小,在工程适用参数范围内,经多组备选函数的逐次逼近拟合及寻优比较,实现了用近似可积分函数替代原水面线计算方程中的不可积函数,并通过简单积分得到了含有流程 $S$ 及首、末端水深 $h_1$ 、 $h_2$ 的近似解析计算通式,不但避免了因分段求和产生的误差累积,也使求解该种断面水面线的计算过程更加简捷、直观,便于实际应用。

## 1 蛋形断面隧洞水面线基本方程

无压蛋形断面隧洞属棱柱体渠道,用能量方程表示的洞内恒定渐变流水面线基本微分方程为

$$\frac{dh}{dS} = \frac{i_0 - J}{1 - Fr^2} \tag{1}$$

其中

$$J = \frac{n^2 Q^2}{A_0^2 R^{4/3}} = \frac{n^2 Q^2 \chi^{4/3}}{A_0^{10/3}}$$

作者简介:滕凯(1957—),男,黑龙江齐齐哈尔人,高级工程师,主要从事水利防灾减灾及工程优化设计研究。E-mail:tengkai007@163.com

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{gA_0B_0^{-1}}} = \frac{QB_0^{1/2}}{g^{1/2}A_0^{3/2}} \quad (2)$$

式中:  $\frac{dh}{dS}$  为水深  $h$  关于流程  $S$  的微分;  $i_0$  为洞底坡降;  $J$  为引入明渠均匀流中的谢才-曼宁公式求得的断面水力坡降;  $Fr$  为断面弗劳德数;  $A_0$  为洞内过水断面面积,  $m^2$ ;  $B_0$  为洞内水面宽度,  $m$ ;  $\chi$  为湿周,  $m$ ;  $R$  为水力半径,  $m$ ;  $n$  为糙率系数;  $Q$  为隧洞设计过水流量,  $m^3/s$ ;  $v$  为平均流速,  $m/s$ ;  $g$  为重力加速度, 一般取  $9.81 m/s^2$ 。

蛋形过水断面是由半径分别为  $0.5r$ 、 $r$  及  $3r$

$$其中 U = \begin{cases} [\arccos(1-6x)]^{\frac{4}{3}} \{0.125[2\arccos(1-6x) - \sin(2\arccos(1-6x))]\}^{-10/3} & 0 \leq x < 1/15 \\ \left\{0.9273 + 6\left[0.6435 - \arcsin\left(\frac{2}{3} - x\right)\right]\right\}^{4/3} \left\{3.023 - 9\arcsin\left(\frac{2}{3} - x\right) - \left[3\cos\left(\arcsin\left(\frac{2}{3} - x\right)\right) - 2\right] \cdot \right. \\ \left. \left[2 - 3x - 2\tan\left(\arcsin\left(\frac{2}{3} - x\right)\right)\right] + 4\tan\left(\arcsin\left(\frac{2}{3} - x\right)\right)\right\}^{-10/3} & 1/15 \leq x < 2/3 \\ [7.92989 - 2\arccos(3x-2)]^{\frac{4}{3}} \{4.59413 - 0.5[2\arccos(3x-2) - \sin(2\arccos(3x-2))]\}^{-10/3} & 2/3 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$P^2 = \begin{cases} \{\sin[\arccos[1-6x]]\} \{0.125[2\arccos(1-6x) - \sin[2\arccos(1-6x)]]\}^{-3} & 0 \leq x < 1/15 \\ \left\{2\left[3\cos\left(\arcsin\left(\frac{2}{3} - x\right)\right) - 2\right]\right\} \left\{3.023 - 9\arcsin\left(\frac{2}{3} - x\right) - \left[3\cos\left(\arcsin\left(\frac{2}{3} - x\right)\right) - 2\right] \cdot \right. \\ \left. \left[2 - 3x - 2\tan\left(\arcsin\left(\frac{2}{3} - x\right)\right)\right] + 4\tan\left(\arcsin\left(\frac{2}{3} - x\right)\right)\right\}^{-3} & 1/15 \leq x < 2/3 \\ \{2\sin[\arccos(3x-2)]\} \{4.59413 - 0.5[2\arccos(3x-2) - \sin(2\arccos(3x-2))]\}^{-3} & 2/3 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (6)$$

式中:  $A$ 、 $B$ 、 $E$  均为已知无量纲综合参数;  $U$ 、 $P$  均为计算断面无量纲中间变量;  $x$  为计算断面无量纲水深。

在方程式(5)、(6)中, 函数以  $x=1/15$  和  $2/3$  为2个界限点被划分成3个连续区间,  $x$  的值域为  $[0, 1]$ 。在隧洞工程中, 考虑  $x < 0.15$  情况下的水面线计算在实际工程中没有意义; 另一方面, 为避免洞内水位过高产生半有压流对工程造成破坏, DL/T5195—2004《水工隧洞设计规范》规定, 洞内富余空间面积不宜小于15%, 同时要求净空高度不应小于0.4 m, 依据上限水深的这一控制条件, 可以求得  $x < 0.82$ , 因此, 本文将  $x$  的取值范围确定为  $[0.15, 0.83]$ 。

## 2 蛋形断面隧洞水面线近似解析通式的建立及精度分析

### 2.1 解析通式的建立

因公式(5)、(6)均为通过3个区间给出的分段超越方程, 式(4)为不可积分函数, 无法通过常规的数学方法直接求解, 可采用近似积分法(二次抛物线法)和拟合替代法完成求解计算, 由于近似积分法计算工作量大, 不便实际工程应用, 本文选择拟合

( $r$  为顶弧半径)的4段圆弧曲线构成的封闭式复合断面, 其断面结构及水力要素详见文献[7], 湿周  $\chi$  计算公式为

$$\chi = \begin{cases} 0.5r\theta_1 \\ r[0.9273 + 6(0.6435 - \theta_2)] \\ r(7.92989 - \theta_3) \end{cases} \quad (3)$$

将相关水力要素代入式(1), 并设  $A = 3r^{4/3}/gn^2$ ,  $B = gr^5/Q^2$ ,  $E = i_0 r^{16/3}/n^2 Q^2$ ,  $x = h/3r$ , 经整理可得蛋形断面隧洞水面线的基本计算公式为

$$S = A \int_{x_1}^{x_2} \frac{B - P^2}{E - U} dx \quad (4)$$

替代法<sup>[8-11]</sup>。

在工程适用参数范围内(即  $0.15 \leq x \leq 0.83$ ), 假定函数  $U_1 = f(x)$ 、 $P_1^2 = f'(x)$  可以分别替代式(5)及式(6), 并满足以下条件: ①所确定的替代函数应具有令人满意的拟合替代精度, 以确保洞内水面线的最终计算成果满足工程设计精度要求; ②在公式的表达形式上, 既要体现简单明了, 又要同时满足对跨区间(3个分段)原函数替代的通式要求, 以实现简化计算的目的; ③将拟合式代入式(4), 通过进一步简化整理后, 用常规的数学方法可完成积分计算。依据式(5)、(6)分别绘制  $U-x$  及  $P^2-x$  关系曲线, 如图1所示。

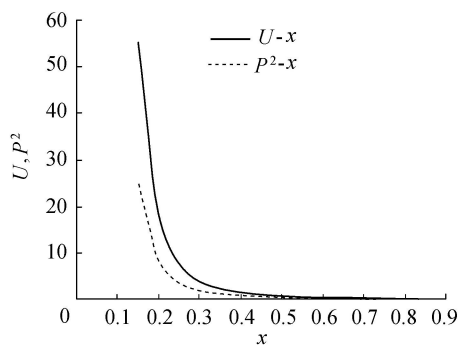


图1  $U-x$  及  $P^2-x$  关系曲线

由图1可见, 当  $x < 0.2$  时,  $U$ 、 $P^2$  随  $x$  的增大急

剧减小,而当  $x>0.3$  时,  $U$ 、 $P^2$  随  $x$  的增大缓慢减小且当  $x\rightarrow\infty$  时,  $U$ 、 $P^2\rightarrow 0$  (渐近与  $x$  轴),由此可得,  $U$ 、 $P^2$  与  $x$  具有较好的高次反比例函数关系,依据这一分析结果,经多组备选反比例函数的数值拟合回归计算,以标准剩余差最小为优化目标函数<sup>[12-13]</sup>,经逐次逼近拟合可得到以下替代函数:

$$U_1 = 0.02801x^{-4} + 0.02182x^{-2} + 0.01382 \quad (7)$$

$$P_1^2 = 0.01288x^{-4} + 0.00922x^{-2} - 0.01305 \quad (8)$$

式中: $U_1$ 、 $P_1^2$  分别为  $U$  和  $P^2$  的拟合替代值。

将式(7)、(8)代入式(4)且进一步简化整理并完成积分后可得:

$$S = V\left[(x_2 - x_1) - \int_{x_1}^{x_2} \frac{mx^2 + w}{ax^4 + bx^2 + c} dx\right] \quad (9)$$

$$\text{其中} \quad V = \frac{A(B + 0.01305)}{a}$$

$$m = \frac{0.00922a}{B + 0.01305} - 0.02182$$

$$w = \frac{0.01288a}{B + 0.01305} - 0.02801$$

$$a = E - 0.01382$$

$$b = -0.02182 \quad c = -0.02801$$

式中: $V$ 、 $m$ 、 $w$  及  $a$  均为中间已知参数; $b$ 、 $c$  均为已知常数。

在工程适用范围内,因  $a = E - 0.01382 > 0$ ,则  $b^2 - 4ac > 0$ ,完成式(9)中的积分可得

$$S = V(x_2 - x_1) - V_1\left(\arctan \frac{x_2}{f_1} - \arctan \frac{x_1}{f_1}\right) -$$

$$V_2 \ln \frac{(x_2 - f_2)(x_1 + f_2)}{(x_2 + f_2)(x_1 - f_2)} \quad (10)$$

$$\text{其中} \quad f_1 = \sqrt{\frac{b + D}{2a}} \quad f_2 = \sqrt{\frac{D - b}{2a}}$$

$$D = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$V_1 = \frac{V[(D + b)m - 2aw]}{D\sqrt{2a(D + b)}}$$

$$V_2 = \frac{V[(D - b)m + 2aw]}{2D\sqrt{2a(D - b)}}$$

式中: $f_1$ 、 $f_2$ 、 $V_1$  及  $V_2$  均为中间已知参数; $x_1$ 、 $x_2$  分别为已知和待求无量纲水深。

根据已知参数  $Q$ 、 $n$ 、 $i_0$ 、 $r_1$  及  $h_1$ (或  $h_2$ )即可利用式(10)直接求解出水深为  $h_2$ (或  $h_1$ )时所对应的流程  $S$ ,较与 DL/T5195—2004《水工隧洞设计规范》推荐的分段求和法及目前应用的其他方法更加简单和直接,较好地解决了因分段求和及以此理论而推导出的其他方法所产生的误差累积问题。

2.2 拟合精度分析

式(10)为式(7)及式(8)代入式(4)后通过积分所得,因此,分析式(7)、(8)替代式(5)、(6)的精

度即可反映式(10)的计算精度。在参数  $x \in [0.15, 0.83]$  范围内,选取不同的  $x$  值分别代入式(5)~(8)求出  $U$ 、 $P^2$  及  $U_1$ 、 $P_1^2$ ,然后计算拟合相对误差  $Z_U$  和  $Z_P$ ,结果见表1和表2。

表1 式(7)拟合精度比较

| $x$  | $U$      | $U_1$    | $Z_U/\%$ | $x$  | $U$     | $U_1$   | $Z_U/\%$ |
|------|----------|----------|----------|------|---------|---------|----------|
| 0.15 | 55.44481 | 56.31199 | 1.564    | 0.50 | 0.55004 | 0.54926 | -0.142   |
| 0.18 | 27.31563 | 27.36957 | 0.197    | 0.53 | 0.44581 | 0.44648 | 0.152    |
| 0.20 | 18.14339 | 18.06557 | -0.429   | 0.55 | 0.39070 | 0.39205 | 0.346    |
| 0.23 | 10.54558 | 10.43555 | -1.043   | 0.58 | 0.32415 | 0.32620 | 0.632    |
| 0.25 | 7.63178  | 7.53350  | -1.288   | 0.60 | 0.28821 | 0.29056 | 0.815    |
| 0.28 | 4.92166  | 4.84916  | -1.473   | 0.63 | 0.24398 | 0.24660 | 1.074    |
| 0.30 | 3.77107  | 3.71429  | -1.505   | 0.65 | 0.21967 | 0.22237 | 1.233    |
| 0.33 | 2.61412  | 2.57606  | -1.456   | 0.68 | 0.18928 | 0.19201 | 1.443    |
| 0.35 | 2.08715  | 2.05850  | -1.373   | 0.70 | 0.17237 | 0.17501 | 1.533    |
| 0.38 | 1.52646  | 1.50825  | -1.193   | 0.73 | 0.15114 | 0.15339 | 1.497    |
| 0.40 | 1.25750  | 1.24434  | -1.047   | 0.75 | 0.13932 | 0.14113 | 1.306    |
| 0.43 | 0.95878  | 0.95112  | -0.799   | 0.78 | 0.12451 | 0.12535 | 0.683    |
| 0.45 | 0.80965  | 0.80464  | -0.619   | 0.80 | 0.11631 | 0.11629 | -0.007   |
| 0.48 | 0.63832  | 0.63618  | -0.336   | 0.83 | 0.10615 | 0.10451 | -1.537   |

注: $Z_U = \frac{U_1 - U}{U} \times 100\%$ 。

表2 式(8)拟合精度比较

| $x$  | $P^2$    | $P_1^2$  | $Z_P/\%$ | $x$  | $P^2$   | $P_1^2$ | $Z_P/\%$ |
|------|----------|----------|----------|------|---------|---------|----------|
| 0.15 | 25.31963 | 25.83870 | 2.050    | 0.50 | 0.22661 | 0.22991 | 1.455    |
| 0.18 | 12.54483 | 12.54099 | -0.031   | 0.53 | 0.17984 | 0.18300 | 1.764    |
| 0.20 | 8.34325  | 8.26745  | -0.908   | 0.55 | 0.15526 | 0.15818 | 1.886    |
| 0.23 | 4.84482  | 4.76385  | -1.671   | 0.58 | 0.12576 | 0.12817 | 1.919    |
| 0.25 | 3.49821  | 3.43175  | -1.900   | 0.60 | 0.10994 | 0.11194 | 1.827    |
| 0.28 | 2.24352  | 2.20003  | -1.938   | 0.63 | 0.09059 | 0.09194 | 1.494    |
| 0.30 | 1.71052  | 1.67952  | -1.812   | 0.65 | 0.08002 | 0.08093 | 1.128    |
| 0.33 | 1.17486  | 1.15769  | -1.461   | 0.68 | 0.06687 | 0.06712 | 0.390    |
| 0.35 | 0.93125  | 0.92052  | -1.152   | 0.70 | 0.05944 | 0.05941 | -0.049   |
| 0.38 | 0.67267  | 0.66851  | -0.619   | 0.73 | 0.04991 | 0.04961 | -0.616   |
| 0.40 | 0.54902  | 0.54770  | -0.240   | 0.75 | 0.04447 | 0.04405 | -0.958   |
| 0.43 | 0.41220  | 0.41356  | 0.329    | 0.78 | 0.03744 | 0.03690 | -1.428   |
| 0.45 | 0.34420  | 0.34658  | 0.691    | 0.80 | 0.03337 | 0.03280 | -1.697   |
| 0.48 | 0.26645  | 0.26960  | 1.181    | 0.83 | 0.02802 | 0.02747 | -1.953   |

注: $Z_P = \frac{P_1^2 - P^2}{P^2} \times 100\%$

由表1和表2可见,在参数  $x \in [0.15, 0.83]$  适用范围内,用式(7)、(8)替代由3个区段函数组成的式(5)、(6)的最大拟合相对正、负误差分别为2.050%和-1.953%,且分别位于拟合区间的两个边界点,平均相对误差为-0.072%。由此可见,式(7)、(8)的拟合精度完全可以满足替代要求。而由式(7)、(8)代入并通过积分获得的水面线计算公式(10),因为积分求和后正、负误差的相互抵消,将使最终水面线计算成果的精度较式(7)、(8)的拟合精度进一步提高(计算误差小于2%)。因此,式(10)计算求得的水面线成果将更接近理论值。

3 实例计算

某蛋形断面泄水隧洞的设计通过流量  $Q =$

$30\text{ m}^3/\text{s}$ ,设计顶弧半径  $r=1.5\text{ m}$ ,洞底设计坡降  $i=0.015$ ,糙率系数  $n=0.012$ ,受进口水流条件限制,起始水深  $h_1=2.7\text{ m}$ ,试计算沿程水面线(洞长为  $0.5\text{ km}$ )。

依据均匀流计算公式可分别求得洞内的临界水深  $h_k=2.903\text{ m}$ ,正常水深  $h_0=1.912\text{ m}$ ,因  $h_0<h<h_k$ ,洞内属降水水面线。选末端水深  $h_2=h_0(1+1\%)=1.931\text{ m}$ ,根据已知参数可分别求得  $f_1=0.3967, f_2=0.423515, V=352.136, V_1=-249.12, V_2=147.53, x_1=0.6, x_2=0.4291$ ,由式(10)可得流程  $S=381.95\text{ m}$ 。

为比较式(10)计算成果的精度,采用 DL/T 5195—2004《水工隧洞设计规范》推荐的分段求和法完成本例洞内水面线计算。在  $h\in[1.931\text{ m}, 2.7\text{ m}]$  范围内分别均匀选取 4 个水深(4 个分段)、8 个水深(8 个分段)和 12 个水深(12 个分段)求得对应末端水深  $h_2=1.931\text{ m}$  时的流程  $S$  分别为  $342.68\text{ m}$ 、 $380.92\text{ m}$  和  $382.13\text{ m}$ 。由于分段求和法不可避免地存在同号误差,因此,水面线计算成果的精度随着计算分段数的增加而提高。可见,式(10)所求成果与 DL/T 5195—2004《水工隧洞设计规范》推荐的分段求和法的 12 个分段求和成果基本一致(相对误差仅为  $0.05\%$ ),式(10)具有较好的计算精度。

## 4 结 语

本文采用优化拟合方法将蛋形过水断面水面线计算方程中的分段超越函数进行了拟合替代,提出了可直接完成水面线计算的近似解析计算通式,改变了目前常规计算方法必须依据能量方程由控制水深的一端逐段求和向另一端推算的基本途径,既实现了求解计算方法上的简单、快捷、适用的目的,又有效解决了常规计算方法不可避免的烦琐计算过程及误差累积问题,使水面线计算成果的精度进一步提高。

## 参考文献:

[1] 武汉大学水利水电学院. 水力计算手册[M]. 北京:中国水利水电出版社,2006:60-80.  
[2] 水利部水利水电规划总院. 水工设计手册[M]. 2 版. 北京:中国水利水电出版社,2011.  
[3] 张建民,王玉蓉,许唯临. 恒定渐变流水面线计算的一种迭代方法[J]. 水利学报,2005,36(4):501-504. (ZHANG Jianmin, WANG Yurong, XU Weilin. New iteration method for calculating water level of gradually varied steady flow[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2005,36(4):501-504. ((in Chinese))  
[4] 万五一,江春波,李玉柱. 变步长法在天然河道水面线计算中的应用[J]. 哈尔滨工业大学学报,2007,39

(4):648-650. (WANG Wuyi, JIANG Chunbo, LI Yuzhu. Application of varies increment iteration to simulation of water-surface profile in natural channels[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2007,39(4):648-650. (in Chinese))  
[5] 张志昌. 水力学[M]. 北京:中国水利水电出版社,2011.  
[6] 宁希南. 蛋形断面管道简明水力计算及其诺谟图[J]. 林业建设,2007(5):22-25. (NING Xinan. Calculation of hydraulic power and its nomograph for pipeline with egg-shaped section[J]. Forestry Construction, 2007(5):22-25. (in Chinese))  
[7] 滕凯. 蛋形断面隧洞临界水深的简易算法[J]. 水利水电科技进展,2013,33(6):37-39. (TENG Kai. Simple algorithm for the critical depth of an egg-shaped section water tunnel[J]. Advances in Science and Technology of Water Resources, 2013,33(6):37-39. (in Chinese))  
[8] 刘刚,滕凯. 梯形断面均匀流水深的近似计算公式[J]. 水利与建筑工程学报,2012,10(1):41-44. (LIU Gang, TENG Kai. Approximate calculation formula uniform flow depth of trapezoidal cross-section[J]. Journal of Water Resources and Architectural Engineering, 2012,10(1):41-44. (in Chinese))  
[9] 谢成玉,滕凯. 三次抛物线形渠道断面收缩水深的简化计算[J]. 南水北调与水利科技,2012,10(2):148-150. (XIE Chengyu, TENG Kai. Simplified equation of contracted water depth in a channel having a cubical parzbola section[J]. South-to-North Water Transfers and Water Science & Technology, 2012,10(2):148-150. (in Chinese))  
[10] 谢成玉,滕凯. 抛物线形断面渠道均匀流水深的近似计算公式[J]. 水电能源科学,2012,30(7):94-95. (XIE Chengyu, TENG Kai. Approximate formula of uniform flow depth for parabolic cross-section channel[J]. Water Resources and Power, 2012,30(7):94-95. (in Chinese))  
[11] 滕凯. 消力池深的简化计算法[J]. 人民长江,2012,43(15):77-79. (TENG Kai. Simplified calculation method of depth of stilling basin[J]. Yangtze River, 2012,43(15):77-79. (in Chinese))  
[12] 王慧文. 偏最小二乘回归法及其应用[M]. 北京:国防工业出版社,1999.  
[13] 阎凤文. 测量数据处理方法[M]. 北京:原子能出版社,1988.

(收稿日期:2013-01-25 编辑:熊水斌)

