DOI:10.3880/j.issn.1006-7647.2015.03.020

扩展有限元法及其在钢筋混凝土结构中的应用综述

李 俊,汪基伟,冷 飞

(河海大学土木与交通学院,江苏 南京 210098)

摘要:简述扩展有限元法的基本思想和应用价值,以钢筋混凝土的裂纹问题(强不连续问题)为例对扩展有限元法中描述裂纹的水平集法、不连续位移场富集策略、积分方案进行了介绍,并给出相关领域近年来的研究成果。概述扩展有限元法在断裂力学领域中的应用动态。在此基础上,分别从混凝土开裂和钢筋与混凝土两种材料的黏结滑移两个方面介绍扩展有限元法在钢筋混凝土结构开裂分析中的研究与应用进展,指出为将该方法应用于水工钢筋混凝土结构等规模巨大、配筋和受力复杂的实际工程中,需对单元模型、裂缝处理方式以及裂缝处钢筋应力等问题进行深入研究。

关键词:扩展有限元法;钢筋混凝土结构;断裂力学;综述

中图分类号:TV313 **文献标志码**:A **文章编号**:1006-7647(2015)03-0106-08

Review of extended finite element method and its application in reinforced concrete structures//LI Jun, WANG Jiwei, LENG Fei (*College of Civil and Transportation Engineering, Hohai University, Nanjing* 210098, *China*)

Abstract: The basic theory and application value of extended finite element method(XFEM) are introduced briefly. The level set method for describing crack, the enrichment strategy of discontinuous displacement field, and the integration scheme of XFEM are presented with an example of crack problem(strong discontinuity) of reinforced concrete(RC), and recent achievements in these fields are exposed. Thereby, a summary of the situation of applications of XFEM in fracture machanics is given. On the basis of the foregoing, the research and application development of XFEM for the analysis of reinforced concrete structure crack are presented from two aspects: concrete cracking, and bond-slip between reinforcement and concrete. It is pointed out that element models, crack treatment, steel stress at crack section and other issues have to be further investigated in order to meet the requirements of characteristics of practical projects(e.g., hydraulic reinforced concrete structures), such as large scale, complex reinforcement, and multi-axial force state.

Key words: extended finite element method; reinforced concrete structures; fracture machanics; review

20世纪末期,Moës等[1]在标准有限元法的基础上,结合单位分解法、水平集法和断裂力学研究成果,提出了扩展有限元法(extended finite element method, XFEM),为不连续问题提供了新的解决方法。该方法通过在标准位移形函数中增加具有不连续性质的富集函数,在单元内部描述位移间断(强不连续)、应变间断(弱不连续),使得有限元网格独立于裂纹几何路径,在追踪裂纹扩展时亦无需重剖网格,提高了裂纹问题的求解效率。

在水利水电工程中,钢筋混凝土结构应用广泛,其限裂分析对结构的正常使用性能及耐久性有重要意义,重要的大体积非杆系混凝土结构的限裂分析通常需要借助非线性有限元进行数值模拟[2]。传统钢筋混凝土有限元中,弥散裂缝模型应用广泛[3],该模型不需随开裂区扩展而更新网格,适用于大型工程,但裂缝分布及裂缝宽度有一定网格依赖性,且无法准确模拟裂缝处的钢筋应力。事实上,钢筋混凝土结构开裂分析时,不仅要考虑混凝土基体的位移不连续,还要考虑钢筋的加强作用及其与混凝土之间的黏结滑移,较为复杂。将扩展有限元法应用于钢筋混凝土结构开裂分析,能调和传统有限元计算效率和计算精度之间的矛盾,有较高的理论价值和广阔的应用前景。

1 扩展有限元法基本原理

1.1 水平集法

水平集法(level set method, LSM)可以从几何上描述静态或动态裂纹,以及孔洞、夹杂等不连续界

基金项目:国家大坝安全工程技术研究中心开放基金(NDSKFJJ1101)

作者简介:李俊(1990—),男,江苏沛县人,硕士研究生,主要从事混凝土结构研究。E-mail:lijunhhucn@163.com

面,它将界面的变化表示为比界面高一维(时间 t)的水平集曲线[4],设不连续界面为 $\Gamma(t)$,任意考察点 $\boldsymbol{x} \in \Gamma(t)$ 满足

$$\phi(\boldsymbol{x},t) = 0 \tag{1}$$

式中:$\phi(\boldsymbol{x},t)$ 为考察点水平集函数。

对于裂纹问题,扩展有限元中常用符号距离函数作为其水平集函数,设 $\boldsymbol{x}_\Gamma$ 为不连续界面上距 $\boldsymbol{x}$ 最近的点,有

$$\phi(\boldsymbol{x},t) = \pm \min_{\boldsymbol{x}_\Gamma \in \Gamma(t)} \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_\Gamma \| \tag{2}$$

Sukumar 等[5]介绍了如何在扩展有限元中采用水平集法描述孔洞、夹杂等弱不连续界面。Ventura 等[6]采用水平集法描述裂纹扩展过程,提出一种改进的向量水平集公式,使得在描述裂纹扩展的同时不改变已有裂纹的水平集值,并且裂纹沿原裂纹面法向扩展时,新裂纹水平集值也不会改变。水平集法可以精确刻画不连续面的几何性质及其动态变化,易于从平面问题推广到三维问题[7]。

1.2 裂纹问题的扩展有限元富集策略

Melenk 等[8]研究了有限元形函数的单位分解法,单位分解法的基本思想是任意函数 $F(\boldsymbol{x})$ 都可以在计算域内表示为如下形式:

$$F(\boldsymbol{x}) = \sum_I [N_I(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x})] \tag{3}$$

其中 $N_I(\boldsymbol{x})$ 满足单位分解,即

$$\sum_I N_I(\boldsymbol{x}) = 1 \tag{4}$$

式中:$N_I(\boldsymbol{x})$ 为标准有限元形函数;I 为求解域节点集;$f(\boldsymbol{x})$ 为 $F(\boldsymbol{x})$ 在计算域内的局部近似函数。

单位分解法为改进标准有限元形函数提供了理论依据。基于单位分解法,可以根据不连续问题的特点,在标准有限元位移近似场的基础上增加富集项,用来模拟单元内部存在的强、弱不连续性。

扩展有限元中,改进后的位移场 $u_{\mathrm{h}}(\boldsymbol{x})$ 由标准有限元部分和富集项叠加得到[9]:

$$u_{\mathrm{h}}(\boldsymbol{x}) = u_{\mathrm{sta}}(\boldsymbol{x}) + u_{\mathrm{enr}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i \in I} [N_i(\boldsymbol{x}) u_{i,\mathrm{sta}}] + \sum_{i \in I^*} [N_i^*(\boldsymbol{x}) \Psi(\boldsymbol{x}) a_i] \tag{5}$$

式中:$u_{\mathrm{sta}}(\boldsymbol{x})$ 为标准有限元位移;$u_{\mathrm{enr}}(\boldsymbol{x})$ 为富集位移;$u_{i,\mathrm{sta}}$ 为标准有限元位移未知量;$N_i(\boldsymbol{x})$ 为标准有限元形函数;$N_i^*(\boldsymbol{x})$ 为单位分解函数;$\Psi(\boldsymbol{x})$ 为富集函数;a_i 为附加自由度;I^* 为富集节点集。$N_i^*(\boldsymbol{x})$ 可以和 $N_i(\boldsymbol{x})$ 相同,也可不同,为了编制程序方便,可取为相同。

不连续问题包括强不连续问题(如裂纹问题中的位移不连续)、弱不连续问题(如夹杂问题和复合材料问题中的应变不连续)等,不同类型的问题需要不同的富集位移构建方法。以下以二维裂纹问题为例,对扩展有限元的位移富集思路进行说明。图1 为包含任意形状裂纹的二维规则化网格,裂纹所在单元的相关节点为富集节点,裂纹影响单元分为裂纹贯穿单元(图 1 中 2 ~ 6 号单元)和裂尖单元(图 1 中 1、7 号单元)两部分,相应富集节点亦分为两部分,即裂尖单元富集节点和裂纹贯穿单元富集节点,若某节点同时属于裂纹贯穿单元和裂尖单元,为保证裂尖位移场计算精度,令其优先属于裂尖富集节点[1]。富集单元和标准单元之间由混合单元(图 1 中阴影区单元)连接,混合单元中同时包含富集节点和标准节点(不参与富集的节点)。

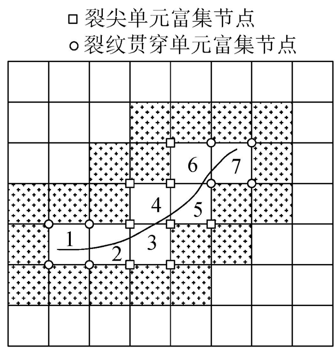

图 1 包含任意形状裂纹的二维网格

对裂纹贯穿单元,采用阶跃函数构建富集函数,以反映裂纹两侧的位移不连续;对裂尖单元,采用断裂力学中裂尖位移场解析解的各项作为基函数构建富集函数[10]。参照式(5),二维裂纹问题的位移模式可统一写为

$$u_{\mathrm{h}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i \in I} [N_i(\boldsymbol{x}) u_{i,\mathrm{sta}}] + \sum_{j \in N_\Gamma} [N_j(\boldsymbol{x}) H(\boldsymbol{x}) a_j] + \sum_{k \in N_\Lambda} \left\{ N_k(\boldsymbol{x}) \sum_{w=1}^{4} [F_w(\boldsymbol{x}) b_{w,k}] \right\} \tag{6}$$

其中

$$H(\boldsymbol{x}) = \mathrm{sign}[\phi(\boldsymbol{x},t)] = \begin{cases} 1 & \phi(\boldsymbol{x},t) > 0 \\ -1 & \phi(\boldsymbol{x},t) < 0 \end{cases} \tag{7}$$

$$F_w(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \sqrt{r} \sin \dfrac{\theta}{2} & w = 1 \\ \sqrt{r} \cos \dfrac{\theta}{2} & w = 2 \\ \sqrt{r} \sin \dfrac{\theta}{2} \sin \theta & w = 3 \\ \sqrt{r} \cos \dfrac{\theta}{2} \sin \theta & w = 4 \end{cases} \tag{8}$$

式中:N_Γ 为裂纹贯穿单元富集节点集;N_Λ 为裂尖单元富集节点集;a_j 和 $b_{w,k}$ 分别为上述两类富集节点的附加自由度;$N_j(\boldsymbol{x})$、$N_k(\boldsymbol{x})$ 为单位分解函数;$H(\boldsymbol{x})$ 为阶跃函数;$F_w(\boldsymbol{x})$ 为裂尖函数;r、θ 为裂尖极

坐标系所定义的位置参数。

Belytschko 等[11]对裂纹贯穿单元富集函数做出修正,在断裂问题中应用较多:

$$\Psi_i(\boldsymbol{x}) = H[\phi(\boldsymbol{x})] - H[\phi(\boldsymbol{x}_i)] \tag{9}$$

将 $\Psi_i(\boldsymbol{x})$ 代替式(5)中 $\Psi(\boldsymbol{x})$,并令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_j$($\boldsymbol{x}_j$ 为混合单元节点坐标),有 $u_{\mathrm{h}}(\boldsymbol{x}_j) = u_{j,\mathrm{sta}}$,式中 $u_{j,\mathrm{sta}}$ 为 j 节点的标准有限元位移未知量。可以看到,改进后得到的节点位移为标准有限元形函数的系数,这一点和标准有限元一致,便于位移后处理,其原因在于对富集函数进行修正后,混合单元内位移函数富集项取值为零,即混合单元中富集节点的附加自由度不对混合单元产生影响,只对裂纹贯穿单元内部产生影响。对于裂尖置于单元内部的情况,可在富集函数中引入斜坡函数 $R(\boldsymbol{x})$[12],以提高混合单元收敛速度,此时用式(10)中的 $\Psi_i(\boldsymbol{x})$ 代替式(5)中的 $\Psi(\boldsymbol{x})$:

$$\Psi_i(\boldsymbol{x}) = N_i(\boldsymbol{x})\Psi(\boldsymbol{x})R(\boldsymbol{x}) \tag{10}$$

其中 $R(\boldsymbol{x})$ 取值为 $\sum_{i\in I^*} N_i^*(\boldsymbol{x})$,可以反映附加自由度在混合单元内的渐变影响。

1.3 扩展有限元的积分方案

扩展有限元中形函数具有单位分解属性,使得刚度矩阵保持了对称、稀疏的特性,这一点和传统有限元一致。但对于不连续单元(如裂尖单元和裂纹贯穿单元),在获得刚度矩阵时,其积分不能依照传统连续单元进行。不连续单元的积分方案中,分区域积分较为常用[13]。

对于裂纹贯穿单元,由于裂纹两侧子区域的位移场是连续的,所以可以在子区域分别积分,然后将子区域的积分叠加得到单元刚度矩阵。对于裂尖单元,当以裂纹尖端为顶点分成若干小三角形进行分区域积分时,裂尖处会出现奇异性,Laborde 等[14]介绍了通过坐标变换消除奇异性的方法。

由于分区域积分方案计算量较大,也有学者提出采用连续积分方案作为替代。Ventura[15]针对简单富集函数提出一种可将分区域积分转化为连续高斯积分的方法,但当单元形态不是平行四边形时有明显误差。Song 等[16]对扩展有限元中位移基函数和自由度进行重置,采用叠合单元和虚拟节点表示裂缝,在此基础上提出简易积分方案,该方案每个单元设置一个积分点,为保证矩阵非奇异,需采取控制措施避免零能模式。喻葭临等[17]结合文献[16]的思路和传统双线性四边形单元的四节点积分方案,提出同时适用于含裂缝单元与标准单元(不含裂缝)的简易积分方案,避免了分区域积分的复杂计算,亦无需对零能模式采取控制措施,有较高的实用价值。

2 扩展有限元法应用概况

扩展有限元允许在单元内部描述裂缝,裂缝扩展时无需重剖网格,同时保留了传统有限元求解非线性问题的优势[18],被广泛应用于断裂力学领域。

Sukumar 等[19-20]针对准静态裂纹扩展问题对扩展有限元数值实现步骤进行说明。董玉文等[21]采用扩展有限元法计算应力强度因子,指出其精度和采用 J 积分计算得到的应力强度因子精度相当。除静态和准静态裂纹问题外,扩展有限元法亦被应用于动态裂纹问题中[22-23]。Belytschko 等[22]采用渐进的动态裂纹尖端解作为基函数,把 I 型和 II 型应力强度因子作为附加自由度,使用显示积分方案求解弹性动态裂纹扩展问题。Menouillard 等[23]对显示积分系统的稳定性进行研究,并给出质量矩阵的对角化方法。扩展有限元的优势之一在于不预设开裂路径,尽可能地还原裂缝的真实形态,这一点在分支裂纹、交叉裂纹[24-25]的模拟中得到展现。

真实裂纹之间可能存在摩擦接触,在水工结构中,裂纹中还可能存在渗透压力作用,是否考虑裂缝内的作用对裂缝预测有较大影响。Dolbow 等[26]采用扩展有限元法研究裂纹面间的摩擦接触,采用非线性本构关系来描述裂纹面的接触,并采用 LATIN 迭代法求解;余天堂[27]采用线性互补法求解裂纹面的非线性接触,能够避免复杂的迭代求解过程;李建波等[28-29]采用虚功原理推导了考虑单元内部裂纹面上分布荷载及缝内粘连的扩展有限元基本公式,提出和标准有限元协调一致的扩展有限元刚度矩阵形成模式。

三维断裂问题一直是研究的热点和难点,Sukumar 等[30]首次利用扩展有限元法研究了三维裂纹扩展问题,其裂尖富集函数建立在与裂纹尖端垂直的平面内,和平面问题类似,其函数形式仍采用极坐标表示。三维裂纹扩展问题的难点在于裂纹面的连续性与光滑性较难模拟,Duan 等[31]利用单元水平集描述三维裂缝,采用最小二乘法改进了原裂缝面方向和新预测开裂方向的一致性,从而改善了三维裂缝面的光滑性。

除断裂力学领域之外,扩展有限元在复合材料界面失效(同时包含强、弱不连续)[32]以及变形局部化(如剪切带、损伤过程区)[16,33]等领域也有应用。值得注意的是,扩展有限元研究集中于线弹性断裂力学领域,当材料属性发生变化时,其断裂性能也会发生变化,相关参数如断裂能和富集函数构造形式也会发生变化,应根据所求问题具体分析。

3 扩展有限元法在钢筋混凝土结构开裂分析中的应用

钢筋混凝土结构开裂分析时存在两种不连续问题：一是混凝土开裂导致的位移不连续；二是钢筋与混凝土两种材料的黏结滑移。扩展有限元法在上述两种不连续模拟中均有应用，现简述如下。

3.1 在混凝土开裂分析中的应用

混凝土断裂力学认为在裂缝尖端区域存在断裂过程区，断裂过程区是微细裂缝发生、发展并逐步转化为宏观裂纹的区域。黏聚裂纹模型(又称凝聚力模型)[34]采用宏观裂纹尖端的黏聚区表示断裂过程区，黏聚区的传力机理通过应力-张开位移曲线进行描述，该曲线与坐标轴所围面积代表相应材料的断裂能。

黏聚裂纹模型能够较真实地反映裂缝尖端受力状态，在包括混凝土在内的准脆性材料断裂分析中得到较多应用。Moës 等[35]把扩展有限元法引入黏聚裂纹分析中，认为稳定裂纹的裂尖 I 型应力强度因子保持为零，并以此作为裂纹是否扩展的评判标准，针对黏聚裂纹尖端位移场和线弹性断裂问题的位移场有所不同，提出采用 $r\sin\dfrac{\theta}{2}\left(\text{或 } r^{3/2}\sin\dfrac{\theta}{2}\text{ 或 } r^2\sin\dfrac{\theta}{2}\right)$对线弹性扩展有限元的裂尖场富集项进行修正。Mariani 等[36]利用扩展有限元位移富集技术构建三次裂尖位移场，从而可以描述黏聚裂纹模型的尖角状裂尖。

实际混凝土开裂分析中，需要确定裂缝开展准则，包括开展方向和裂缝扩展步长。Unger 等[37]把扩展有限元法和自适应网格加密算法相结合以追踪混凝土结构黏聚裂纹的扩展，将采用不同裂纹扩展准则的数值算例计算结果与试验结果进行对比研究，结果表明基于线弹性断裂力学的最大能量释放率准则在预测开裂方向时有较好的稳定性。方修君等[38]在研究混凝土梁的复合型开裂时，推荐采用简化的最大切向应力准则确定裂缝扩展方向。裂缝开展步长尚缺乏明确的理论研究，多根据具体问题选择一个较小值。

黏聚裂纹模型可以较为真实地模拟裂尖受力状态，但需预先设定起裂位置，杜效鹊等[39]结合扩展有限元和黏聚裂纹模型，研究了预制缝重力坝模型的断裂特性，得出与试验结果一致的荷载响应曲线和裂缝扩展路径；张晓东等[40]利用黏聚裂纹模型研究了带初始边缘裂纹的混凝土板在单向拉伸作用下的裂纹扩展过程，效果良好。然而实际工程中并不是总能预先获得开裂位置，而且一般有多条裂纹发生，此时过分关注裂尖稳定是不必要的。陈胜宏等[41]采用扩展有限元法对小湾拱坝坝踵开裂进行分析，采用最大拉应力准则判断裂缝是否扩展，并且认为裂缝发生后即贯穿整个单元，该处理方法便于处理大型复杂结构，但计算结果表明裂缝扩展范围与网格尺寸有一定关系。

在细观层次上，混凝土被认为是由骨料、硬化砂浆和二者之间的过渡区组成的复合材料，其中骨料和硬化砂浆交界处易产生微细裂纹，微细裂纹的发展和贯通导致宏观裂缝的出现。采用扩展有限元法模拟混凝土细观断裂过程需要解决以下问题：①不同材料间的弱不连续模拟，即复合材料界面(过渡区)的模拟；②微细裂纹产生、发展导致的强不连续模拟；③复合材料界面附近断裂参数的确定。江守燕等[42]采用扩展有限元法对包含圆形随机骨料的多夹杂问题进行弱不连续分析，用水平集法描述材料界面，采用标准网格进行离散，减轻了网格剖分的负担，但该研究假定材料为线弹性，不涉及微细裂纹的产生和扩展。杜修力等[43]采用扩展有限元法模拟了混凝土微细裂纹的产生和发展过程，将骨料周围 2mm 厚度范围内设置为过渡区，给出骨料、过渡区、砂浆的力学参数(开裂前假定三者都是线弹性材料，开裂后采用线性的应力-裂纹宽度关系表征混凝土软化特性)。由于假定裂纹产生后随即贯穿整个单元，为保证收敛性和求解精度，该研究网格剖分较为精细，对过渡区需单独考虑，计算成本较大。于红军[44]研究了含复杂界面的非均匀材料的断裂参数确定方法，采用相互作用积分计算位于界面附近或界面上的裂尖应力强度因子，验证了相互作用积分的稳定性和区域无关性。

上述研究将扩展有限元法应用到素混凝土的开裂模拟中，可为扩展有限元法应用于钢筋混凝土结构提供参考，但由于没有考虑钢筋在限制混凝土开裂中起到的作用，因而无法直接应用于钢筋混凝土结构开裂分析。

3.2 在钢筋与混凝土界面模拟中的应用

不同于素混凝土结构，钢筋混凝土结构需要考虑钢筋的加强作用以及钢筋与混凝土两种材料的相互作用，其中钢筋与混凝土的黏结滑移是关键问题，是否考虑黏结滑移对裂缝分布及裂缝宽度有明显影响。茹忠亮等[45]用扩展有限元法对预设初始裂缝的钢筋混凝土梁复合断裂过程进行模拟，假定钢筋与混凝土之间没有滑移，得到的极限承载力较试验值偏大，钢筋布置区的裂缝分布和试验情况也有较大差别。传统钢筋混凝土有限元模型依据钢筋模拟

方法的不同分为3种：分离式、组合式、整体式，其中分离式和组合式模型可以模拟钢筋与混凝土的黏结滑移，在裂缝分析中应用较多[46]，也可在扩展有限元分析中借鉴采用。

Simone等[47]把扩展有限元的思想引入钢筋与混凝土界面的模拟，利用有限元形函数的单位分解性质，对钢筋与混凝土界面上的节点预设附加自由度以考虑二者的相对滑移。Deb等[48]在研究灌浆锚杆时，定义含锚杆的实体单元为富集单元，富集单元有附加自由度，用于确定锚杆的位移、应力，富集单元的刚度矩阵由岩体、砂浆、锚杆共同组成。Simone等[47]的研究基于分离式模型，Deb等[48]的研究基于组合式模型，但二者在分析中没有考虑混凝土开裂或岩体开裂导致的不连续位移。Ibrahimbegovic等[49]基于平面组合式模型，在包含钢筋的混凝土单元位移场中加入黏结滑移附加项，基体开裂则采用内嵌不连续模型进行模拟，然后把位移分解为不计滑移时钢筋混凝土的位移与黏结滑移引起的位移之和，该研究优点在于同时考虑了基体开裂和黏结滑移两种不连续。何学[50]建立了分离式钢筋混凝土扩展有限元模型，采用四节点扩展有限元等参单元模拟混凝土基体，采用杆单元模拟钢筋，并对传统四边形黏结单元进行改进，与钢筋单元相连的部分保持位移连续，与混凝土相连的部分添加由裂缝产生的附加位移，使之可以考虑裂缝引起的混凝土位移间断。文献[49-50]保留了传统钢筋混凝土有限元的架构，对混凝土、钢筋及二者的黏结滑移分别考虑，适用于不同配筋及复杂受力状况，为扩展有限元法应用于实际钢筋混凝土工程作出了有益探索。

非杆系钢筋混凝土结构常通过控制钢筋应力间接控制裂缝宽度[2]，因而准确得到裂缝处的钢筋应力有重要意义。Contrafatto等[51]研究了规则配筋轴心受拉构件的钢筋应力分布，用变分原理推导了考虑基体开裂、黏结滑移的基本方程，探讨了混凝土形函数和钢筋形函数的改进方法，从而能够描述由裂缝、滑移引起的局部大梯度应力（应变）场，该研究对准确求得复杂配筋及复杂受力状态下裂缝处钢筋应力有参考意义。

另外，通用有限元软件ABAQUS在原有的断裂力学分析功能基础上增加了扩展有限元的分析模块，许多学者基于此进行了素混凝土构件和钢筋混凝土构件的断裂分析。可以充分利用通用有限元程序的非线性求解功能[52]，也可通过加入弹簧单元的方法考虑钢筋与混凝土的黏结滑移[53]，目前该软件的扩展有限元分析功能仍处在不断发展和丰富中。

3.3 需要继续研究的问题

由于钢筋混凝土结构开裂机理的复杂性，多数研究侧重于两种不连续问题中的一个方面，少数研究对两种不连续问题进行统一考虑[49-51,53]。扩展有限元的思想可以和传统钢筋混凝土有限元结合（文献[50]称之为钢筋混凝土扩展有限元），为同时解决钢筋混凝土结构中的两类不连续问题提供思路。随着结构设计中正常使用性能及耐久性的重要性逐渐增大，需要更高效的裂缝分布计算方法，既能保证一定的计算精度，其计算成本又不是太高，扩展有限元在该领域有广阔的应用前景。但是，目前钢筋混凝土扩展有限元还处于研究阶段，尚有许多问题需要深入研究：

a. 构建合适的单元模型，能够模拟钢筋与混凝土的黏结滑移，同时满足实际工程中复杂配筋的需要。传统钢筋混凝土有限元中，组合式模型可以考虑任意方向、任意数量的配筋，通过界面单元模拟钢筋与混凝土的黏结滑移，可借鉴文献[50]的方法对传统界面单元进行改进，在界面单元与混凝土相连处增加附加位移项，使之能够考虑混凝土开裂带来的影响。

b. 构建合适的裂缝模型，既能满足裂缝分布计算精度要求，又不过分复杂，符合工程需求。断裂力学裂缝模型需要较多参数，在分析、设计时存在较多不确定性，而且钢筋混凝土结构中由于钢筋参与工作，混凝土裂缝的开展受到限制，裂缝不会因裂尖处应力集中导致不稳定扩展，过分关注裂尖应力状态是不必要的，因而传统的强度理论（如最大拉应力准则）在裂缝分析、限裂设计中仍有应用价值。此外，通常大体积混凝土结构裂缝开展深度较大，在较小的网格尺寸下，仍可假定裂缝产生后随即贯穿整个单元。

c. 多裂纹问题及复合型开裂问题。当采用断裂力学裂缝模型时，单一裂纹的I型开裂已有较多研究，但多裂纹、交叉裂纹以及复合型开裂问题研究较少。多裂纹以及复合型开裂问题需要建立相应的位移模式、裂纹扩展准则和裂纹汇合准则，随着裂纹数目增多，裂纹间相互作用更趋复杂。钢筋混凝土结构一般会产生较多裂缝，因而要反映其真实开裂情况仍有一定难度。如采用传统强度理论作为开裂准则，可简化分析，但仍需对位移模式以及裂缝间作用进行研究。

d. 基体开裂情况下钢筋与混凝土界面滑移的高精度模拟以及裂缝处钢筋应力的高精度算法。裂缝处钢筋应力和裂缝宽度具有正相关性，同时钢筋应力也是结构（构件）承载力的重要指标。钢筋一

般可采用杆单元进行模拟,杆单元的平均应力即代表该单元内钢筋应力,而事实上由于黏结切应力的存在,单元内钢筋应力分布是不均匀的,当钢筋横穿裂缝时,裂缝处钢筋应力有突跃现象。可考虑利用扩展有限元位移富集思想构建能够描述裂缝处局部变形集中的钢筋形函数,非均匀有理 B 样条曲线有良好的局部修改能力,且有良好的可导性,可用来准确模拟裂缝处钢筋应力突跃。

4 结 论

a. 扩展有限元法充分利用有限元形函数的单位分解属性,使得不连续界面的描述独立于网格剖分,在追踪不连续界面扩展时亦无需更新网格,同时由于其保留了标准有限元求解非线性问题的优势,因而在多种材料的强、弱不连续问题研究中应用广泛。

b. 将扩展有限元法应用于钢筋混凝土结构开裂分析,有理论价值和应用前景。同时考虑混凝土开裂和黏结滑移两种不连续问题的研究较少,钢筋混凝土扩展有限元可为此提供新的思路,但该方法尚处于研究阶段,其理论体系有待于进一步完善。

参考文献:

[1] MOËS N, DOLBOW J, BELYTSCHKO T. A finite element method for crack growth without remeshing [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, 46(1): 131-150.

[2] SL91—2008 水工混凝土结构设计规范[S].

[3] 江见鲸,陆新征. 混凝土结构有限元分析[M]. 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2013.

[4] OSHER S, SETHIAN J A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations [J]. Journal of Computational Fhysics, 1988, 79(1): 12-49.

[5] SUKUMAR N, CHOPP D L, MOËS N, et al. Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, 190(46): 6183-6200.

[6] VENTURA G, BUDYN E, BELYTSCHKO T. Vector level sets for description of propagating cracks in finite elements [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003, 58: 1571-1592.

[7] STOLARSKA M, CHOPP D L, MOËS N, et al. Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, 51(8): 943-960.

[8] MELENK J M, BABUŠKA I. The partition of unity finite element method: basic theory and applications [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, 139(1/2/3/4): 289-314.

[9] CHESSA J, WANG H, BELYTSCHKO T. On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003, 57(7): 1015-1038.

[10] BELYTSCHKO T, BLACK T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, 45(5): 601-620.

[11] BELYTSCHKO T, CHEN H, XU J, et al. Dynamic crack propagation based on loss of hyperbolicity and a new discontinuous enrichment [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003, 58(12): 1873-1905.

[12] FRIES T P. A corrected XFEM approximation without problems in blending elements[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2008, 75(5): 503-532.

[13] 余天堂. 扩展有限元法的数值方面[J]. 岩土力学, 2007, 28(增刊 1): 305-310. (YU Tiantang. Numerical aspects of the extended finite element method[J]. Rock and Solid Mechanics, 2007, 28 (Sup1): 305-310. (in Chinese))

[14] LABORDE P, POMMIER J, RENARD Y, et al. High-order extended finite element method for cracked domains[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005, 64(3): 354-381.

[15] VENTURA G. On the elimination of quadrature subcells for description of propagating cracks in finite elements [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, 66: 761-795.

[16] SONG J H, AREIAS P, BELYTSCHKO T. A method for dynamic crack and shear band propagation with phantom nodes[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, 67(6): 868-893.

[17] 喻葭临,张其光,于玉贞,等. 扩展有限元中非连续区域的一种积分方案[J]. 清华大学学报:自然科学版, 2009 49(3): 351-354. (YU Jialin, ZHANG Qiguang, YU Yuzhen, et al. An integration scheme for discontinuities in the extended finite element method [J]. Journal of Tsinghua University: Science and Technology, 2009, 49 (3): 351-354. (in Chinese))

[18] KARIHALOO B L, XIAO Q Z. Modelling of stationary and growing cracks in FE framework without remeshing: a state-of-the-art review[J]. Computers & Structures, 2003, 81(3): 119-129.

[19] SUKUMAR N, PRÉVOST J H. Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method Part I: Computer implementation [J]. International Journal of Solids and Structures, 2003, 40(26): 7513-7537.

[20] HUANG R, SUKUMAR N, PRÉVOST J H. Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element

method: part Ⅱ numerical applications[J]. International Journal of Solids and Structures, 2003, 40(26): 7539-7552.

[21] 董玉文,余天堂,任青文. 直接计算应力强度因子的扩展有限元法[J]. 计算力学学报,2008,25(1): 72-77. (DONG Yuwen, YU Tiantang, REN Qingwen. Extended finite element method for direct evaluation of strength intensity factors[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics,2008,25(1): 72-77. (in Chinese))

[22] BELYTSCHKO T, CHEN H. Singular enrichment finite element method for elastodynamic crack propagation[J]. International Journal of Computational Methods, 2004, 1(1): 1-15.

[23] MENOUILLARD T, RÉTHORÉ J, COMBESCURE A, et al. Efficient explicit time stepping for the eXtended Finite Element Method (X-FEM)[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, 68(9): 911-939.

[24] ZI G, SONG J H, BUDYN E, et al. A method for growing multiple cracks without remeshing and its application to fatigue crack growth [J]. Modeling and Simulations for Material Science and Engineering, 2004, 12: 901-915.

[25] 石路杨,余天堂. 多裂纹扩展的扩展有限元法分析[J]. 岩土力学, 2014, 35(1): 263-272. (SHI Luyang, YU Tiantang. Analysis of multiple crack growth using extended finite element method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2014,35(1): 263-272. (in Chinese))

[26] DOLBOW J, MOËS N, BELYTSCHKO T. An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,2001,190(51): 6825-6846.

[27] 余天堂. 摩擦接触裂纹问题的扩展有限元法[J]. 工程力学, 2010 (4): 84-89. (YU Tiantang. An extended finite element method for modeling crack problems with frictional contact[J]. Engineering Mechanics, 2010 (4): 84-89. (in Chinese))

[28] 李建波,陈健云,林皋. 非网格重剖分模拟宏观裂纹体的扩展有限单元法(1:基础理论)[J]. 计算力学学报, 2006,23(2): 207-213. (LI Jianbo, CHEN Jianyun, LIN Gao. Extended finite element method for modeling cracks without remeshing (I: basic theory)[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2006, 23(2): 207-213. (in Chinese))

[29] 李建波,陈健云,林皋. 非网格重剖分模拟宏观裂纹体的扩展有限单元法(2: 数值实现)[J]. 计算力学学报, 2006,23(3): 317-323. (LI Jianbo, CHEN Jianyun, LIN Gao. Extended finite element method for modeling cracks without remeshing (2: numerical implementation)[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2006, 23(3): 317-323. (in Chinese))

[30] SUKUMAR N, MOËS N, MORAN B, et al. Extended finite element method for three-dimensional crack modelling [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000, 48(11): 1549-1570.

[31] DUAN Q, SONG J H, MENOUILLARD T, et al. Element-local level set method for three-dimensional dynamic crack growth[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009, 80(12): 1520-1543.

[32] HETTICH T, RAMM E. Interface material failure modeled by the extended finite-element method and level sets [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2006, 195: 4753-4767.

[33] PATZÁK B, JIRÁSEK M. Process zone resolution by extended finite elements [J]. Engineering Fracture Mechanics, 2003, 70(7): 957-977.

[34] ELICES M, GUINEA G V, GOMEZ J, et al. The cohesive zone model: advantages, limitations and challenges[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2002, 69(2): 137-163.

[35] MOËS N, BELYTSCHKO T. Extended finite element method for cohesive crack growth [J]. Engineering Fracture Mechanics, 2002, 69(7): 813-833.

[36] MARIANI S, PEREGO U. Extended finite element method for quasi-brittle fracture [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003, 58: 103-126.

[37] UNGER J F, ECKARDT S, KÖNKE C. Modelling of cohesive crack growth in concrete structures with the extended finite element method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2007, 196(41): 4087-4100.

[38] 方修君,金峰,王进廷. 用扩展有限元方法模拟混凝土的复合型开裂过程[J]. 工程力学, 2007, 24(增刊1): 46-52. (FANG Xiujun, JIN Feng, WANG Jinting. Simulation of mixed-mode fracture of concrete using extended finite element method [J]. Engineering Mechanics, 2007, 24(Sup1): 46-52. (in Chinese))

[39] 杜效鹄,段云岭,王光纶. 重力坝断裂数值分析研究[J]. 水利学报, 2005, 36(9): 1-10. (DU Xiaohu, DUAN Yunling, WANG Guanglun. Numerical analysis of fracture in gravity dam[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2005, 36(9): 1-10. (in Chinese))

[40] 张晓东,丁勇,任旭春. 混凝土裂纹扩展过程模拟的扩展有限元法研究[J]. 工程力学, 2013, 30(7): 14-21, 27. (ZHANG Xiaodong, DING Yong, REN Xuchun. Simulation of the concrete crack propagation process with the extended finite element method [J]. Engineering Mechanics, 2013, 30(7): 14-21, 27. (in Chinese))

[41] 陈胜宏,汪卫明,徐明毅,等. 小湾高拱坝坝踵开裂的有限单元法分析[J]. 水利学报, 2003, 34(1): 66-71. (CHEN Shenghong, WANG Weiming, XU Mingyi, et al. Finite element analysis of the crack propagation in high arch dam heel of Xiaowan project[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2003, 34(1): 66-71. (in Chinese))

[42] 江守燕,杜成斌. 弱不连续问题扩展有限元法的数值精度研究[J]. 力学学报, 2012, 44(6): 1005-1015.

(JIANG Shouyan, DU Chengbin. Study on numerical precision of extended finite element methods for modeling weak discontinuities[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2012, 44(6): 1005-1015. (in Chinese))
[43] 杜修力,金浏,黄景琦. 基于扩展有限元法的混凝土细观断裂破坏过程模拟[J]. 计算力学学报,2012,29(6): 940-947. (DU Xiuli, JIN Liu, HUANG Jingqi. Simulation of meso-fracture process of concrete using the extended finite element method[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2012, 29(6): 940-947. (in Chinese))
[44] 于红军. 含复杂界面非均匀材料断裂力学研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学,2010.
[45] 茹忠亮,申崴,赵洪波. 基于扩展有限元法的钢筋混凝土梁复合断裂过程模拟研究[J]. 工程力学,2013,30(5): 215-220. (RU Zhongliang, SHEN Wei, ZHAO Hongbo. Simulation of mixed-mode fracture process of reinforced concrete beam based on extended finite element method[J]. Engineering Mechanics, 2013, 30(5): 215-220. (in Chinese))
[46] 汪基伟,张雄文,林新志. 考虑黏结滑移的平面组合式单元模型研究与应用[J]. 工程力学,2008,25(1): 97-102. (WANG Jiwei, ZHANG Xiongwen, LIN Xinzhi. Research and applications of a plane embedded combined element model considering bond and slip[J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(1): 97-102. (in Chinese))
[47] SIMONE A, WELLS G N, SLUYS L J. A novel technique for modelling interfaces in reinforced brittle materials [C]//DEBORST R, MAZARS J, PIJAUDIERCABOT G. 4th International Conference on Fracture Mechanics of Concrete Structures. Leiden: A A Balkema Publishers, 2001: 841-846.
[48] DEB D, DAS K C. Enriched finite element procedures for analyzing decoupled bolts installed in rock mass[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2011, 35(15): 1636-1655.
[49] IBRAHIMBEGOVIC A, BOULKERTOUS A, DAVENNE L, et al. Modelling of reinforced-concrete structures providing crack-spacing based on X-FEM, ED-FEM and novel operator split solution procedure[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2010, 83(4): 452-481.
[50] 何学. 钢筋混凝土扩展有限元单元模型研究[D]. 南京: 河海大学,2013.
[51] CONTRAFATTO L, CUOMO M, FAZIO F. An enriched finite element for crack opening and rebar slip in reinforced concrete members[J]. International Journal of Fracture, 2012, 178(1/2): 33-50.
[52] 方修君,金峰. 基于 ABAQUS 平台的扩展有限元法[J]. 工程力学,2007,24(7): 6-10. (FANG Xiujun, JIN Feng. Extended finite element method based on abaqus [J]. Engineering Mechanics, 2007, 24(7): 6-10. (in Chinese))
[53] 杨涛,邹道勤. 基于 XFEM 的钢筋混凝土梁开裂数值模拟[J]. 浙江大学学报:工学版,2013,47(3): 495-501. (YANG Tao, ZOU Daoqin. Numerical simulation of crack growth of reinforced concrete beam based on XFEM[J]. Journal of Zhejiang University: Engineering Science, 2013, 47(3): 495-501. (in Chinese))
(收稿日期:2014-02-07 编辑:骆超)

(上接第 88 页)
[5] 曾祥,胡铁松,郭旭宁,等. 跨流域供水水库群调水启动标准研究[J]. 水利学报,2013,44(3):253-261. (ZENG Xiang, HU Tiesong, GUO Xuning, et al. Triggering mechanism for inter-basin water transfer-supply in multi-reservoir system[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2013, 44(3):253-261. (in Chinese))
[6] 姜广义. 长距离调水工程中信息化设备的维护与管理初探[J]. 水电能源科学, 2008, 26(3): 116-117. (JIANG Guangyi. Discussion on maintenance and management of informationization equipment in long distance water supply project[J]. Water Resources and Power, 2008, 26(3): 116-117. (in Chinese))
[7] 李铮,李宏恩,袁启旺,等. 阶跃函数模型在龙江水电站压力钢管监测中的应用[J]. 水电能源科学,2011,29(7):97-99,152. (LI Zheng, LI Hongen, YUAN Qiwang, et al. Application of step function model to steel penstock monitoring of Longjiang Hydropower Station[J]. Water Resources and Power, 2011, 29(7): 97-99, 152. (in Chinese))
[8] 李宏恩,李铮,范光亚,等. 龙江水电站坝后厂房高边坡锚杆应力分析[J]. 水利水电科技进展,2012,32(8): 59-62,94. (LI Hongen, LI Zheng, FANG Guangya, et al. Analysis of anchor bar stress for high slopes of powerhouse at dam toe of Longjiang hydropower plant[J]. Advances in Science and Technology of Water Resources, 2012, 32(8):59-62, 94. (in Chinese))
[9] 何勇军,刘成栋,向衍,等. 大坝安全监测与自动化[M]. 北京:中国水利水电出版社,2008:2-7.
[10] 崔何亮,郑晓红,王玉洁. 光纤应变分布传感的工程实用情况及其在水工领域的应用前景[J]. 大坝与安全,2012(1): 43-46. (CUI Heliang, ZHENG Xiaohong, WANG Yujie. Application of optical fiber distributed strain sensing and its future in hydraulic engineering[J]. Large Dam & Safety, 2012(1):43-46. (in Chinese))
(收稿日期:2014-02-16 编辑:骆超)