

特征线算子分裂有限元的圆柱绕流大涡模拟

胡 彬,水庆象,王大国,彭仁涛

(西南科技大学环境与资源学院,四川 绵阳 621010)

摘要:为研究圆柱绕流流场特性,将大涡模拟与特征线算子分裂有限元相结合,建立了大涡模拟特征线算子分裂有限元模型,对单圆柱和串列双圆柱绕流问题进行了数值模拟,所得结果与现有研究结果吻合较好。模拟结果表明:对单圆柱绕流,随着雷诺数的增大,圆柱近尾流区上下交替的涡旋逐渐靠近通过圆柱几何中心的水平线,且涡脱落位置逐渐靠近圆柱。对 $Re=1\,000$ 的串列双圆柱绕流,临界间距在圆柱直径的 2.25~2.5 倍之间;当两圆柱间距小于临界间距时,上游圆柱后方无明显涡旋脱落,间隙处压力较稳定;大于临界间距时,有涡旋脱落,上游圆柱尾流区上下表面交替出现强负压区。

关键词:圆柱绕流;大涡模拟;特征线算子分裂有限元;临界间距

中图分类号:TV131.2;O357 **文献标志码:**A **文章编号:**1006-7647(2017)02-0027-06

Large eddy simulation of flow around circular cylinder combined with characteristic-based operator-splitting finite element method//HU Bin, SHUI Qingxiang, WANG Daguo, PENG Rentao (School of Environment and Resources, Southwest University of Science and Technology, Mianyang 621010, China)

Abstract: In order to investigate the characteristics of flow fields around circular cylinders, a numerical model was developed by combining large eddy simulation (LES) with the characteristic-based operator-splitting finite element method. The model was used to simulate flow fields around a circular cylinder and two circular cylinders in tandem arrangement, and the obtained results agree with the existing results. The simulation results show that, for the flow around a circular cylinder, with the increase of the Reynolds number, the vortexes occurring at the top and bottom surfaces alternatively in the near-wake region gradually approach each other and pass along the horizontal line through the geometric center of the cylinder, and the location of vortex shedding gradually approach the cylinder; for the two circular cylinders in tandem arrangement, with $Re=1\,000$, the critical space between the two circular cylinders is 2.25 to 2.50 times their diameters; when the space between the two circular cylinders is smaller than the critical space, vortex shedding does not occur at the rear of the upstream cylinder, and the pressure in the space between the two circular cylinders is stable; when the space between the two circular cylinders is larger than the critical space, vortex shedding occurs, and strong negative pressure regions occur at the top and bottom surfaces alternatively in the near-wake region of the upstream cylinder.

Key words: flow around circular cylinder; large eddy simulation; characteristic-based operator-splitting finite element method; critical space

湍流是流体运动中的常见现象,随着计算机设备性能的不断提高,数值试验广泛应用于湍流的研究中。目前研究湍流的数值方法主要有直接数值模拟^[1]、雷诺时均模拟^[2]和大涡模拟(large eddy simulation, LES)^[3] 3 种,其中大涡模拟由于计算精度较高和计算量较小而被认为是最具潜力的方法之一,其基本思想是将湍流运动的涡团分为大尺度涡和小尺度涡,对大尺度涡直接数值求解,小尺度涡对

湍流运动的影响则通过建立模型求解^[4]。

有限元法在数值模拟方面能表现出良好的几何边界和边界条件适应性,并被广泛用于求解流体动力学问题,但经典的 Galerkin 有限元法在处理流体对流问题上容易出现数值振荡^[5]。为克服该困难,近年来发展了多种有限元法,目前应用较为广泛的有 streamline upwinding petrov-Galerkin (SUPG) 法^[6]、Taylor-Galerkin 法^[7]、特征线-Galerkin 法^[8] 等。

基金项目:四川省教育厅科研项目(16CZ0013);绵阳市科技计划项目(14S-02-6);西南科技大学研究生创新基金(14YCXJJ0039)

作者简介:胡彬(1989—),女,硕士研究生,主要从事计算流体力学研究。E-mail:hu_bin180@163.com

通信作者:王大国(1975—),男,教授,博士,主要从事计算流体力学研究。E-mail:dan_wanguo@163.com

Wang 等^[9]将 Taylor 展开引入到特征线-Garlerkin 法并结合算子分裂法的优点提出了特征线算子分裂 (characteristic-based operator splitting, CBOS) 有限元法,该方法将 Navier-Stokes 方程分裂成扩散项和对流项,对流项借鉴了 CBS (characteristic-based split) 算法^[10]的简单显式特征线时间离散,从而避免了其他有限元法修正权函数的困难,王伟等^[11]采用该方法对线性剪切来流的方柱绕流展开了研究。本文建立了大涡模拟 CBOS 有限元模型,对单圆柱和串列双圆柱绕流问题进行数值模拟分析。

1 数值模型

1.1 大涡模拟控制方程

二维非定常黏性不可压缩流动 (忽略能量损失) 可由连续方程和 Navier-Stokes 方程控制,其无量纲形式为

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + f_i \quad (i, j = 1, 2) \quad (2)$$

式中: $(u_1, u_2) = (u, v)$, u 为水平方向流速, v 为垂向流速; p 为压力; t 为时间; Re 为雷诺数; f_1, f_2 分别为水平方向和垂向外力; $(x_1, x_2) = (x, y)$, x 为水平坐标, y 为垂向坐标。

采用盒式滤波器对方程 (1) (2) 进行滤波, 得到以下方程^[12]:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \bar{f}_i \quad (4)$$

式中: 带上横杠“-”的变量为过滤后大尺度变量; τ_{ij} 为滤波后产生的亚格子应力项, 采用亚格子涡黏模式表示为

$$\tau_{ij} = - 2\nu_t \bar{S}_{ij} + \frac{1}{3} \tau_{ii} \delta_{ij} \quad (5)$$

式中: $\bar{S}_{ij}$ 为大尺度变量的变形率张量; δ_{ij} 为置换算子; ν_t 称为亚格子涡黏系数, Smagorinsky^[13] 根据湍流动能生成与耗散平衡的原则, 对其做出如下假设

$$\nu_t = (c_s \Delta)^2 \sqrt{\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)} \quad (6)$$

式中: c_s 为 Smagorinsky 系数, 一般取 0.1 ~ 0.2 时可获得较好的计算结果, 本文取 0.1; Δ 为网格过滤尺度。

将式 (5) 代入式 (4), 并将 $\frac{1}{3} \tau_{ii} \delta_{ij}$ 并入压力 $\bar{p}$

中, 则引入亚格子涡黏系数的大涡模拟动量方程为

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{1}{Re} + \nu_t \right) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (7)$$

为简洁起见, 以下各过滤后大尺度变量均略去上横杠“-”。

1.2 CBOS 有限元法

基于 CBOS 有限元法^[9]的基本思想, 采用算子分裂法将控制方程 (3) 和 (7) 分裂成扩散项和对流项:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{i,n+\theta}}{\partial t} - \left(\frac{1}{Re} + \nu_t \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_{i,n+\theta}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{j,n+\theta}}{\partial x_i} \right) = - \frac{\partial p_{n+1}}{\partial x_i} + f_i \\ \frac{\partial u_{i,n+\theta}}{\partial x_i} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$\frac{\partial u_{i,n+1}}{\partial t} + u_{j,n+1} \frac{\partial u_{i,n+1}}{\partial x_j} = 0 \quad (9)$$

式中: $u_{i,n+\theta}$ 为扩散项 (式 (8)) 在 $n+1$ 时刻的解, 同时是对流项 (式 (9)) 在 $n+1$ 时刻的初值; $u_{i,n+1}$ 是对流项在 $n+1$ 时刻的解, 同时也是控制方程 (3) 和 (7) 在 $n+1$ 时刻的解。

在式 (7) 中, 对亚格子涡黏系数 ν_t 进行线性化处理, 式 (7) 与式 (2) 在方程形态上相同, 因此, 式 (8) 与式 (9) 有限元求解可参考 Wang 等^[9] 的有限元求解方法。

1.3 求解步骤

当已知 n 时刻的值, 求解 $n+1$ 时刻的值时, 求解步骤如下:

a. 以 n 时刻的速度场 $u_{i,n}$ 作为初值, 求解方程 (6), 得到 $n+1$ 时刻的亚格子涡黏系数 ν_t 。

b. 以 n 时刻的速度场 $u_{i,n}$ 、压力场 p_n 作为初值, 求解扩散方程 (8), 得到 $n+1$ 时刻速度场的过渡值 $u_{i,n+\theta}$ 和压力值 p_{n+1} 。

c. 以 $u_{i,n+\theta}$ 作为初值, 求解对流方程 (9), 得到 $n+1$ 时刻速度场 $u_{i,n+1}$, 完成 $n+1$ 时刻的求解。

d. 转到下一时刻, 重复步骤 a、b、c。

2 单圆柱绕流模拟

2.1 计算区域、边界条件和网格划分

控制方程中参数为无量纲形式, 故对计算参数均进行无量纲处理。取圆柱直径 $D=0.1$ 为特征长度, 计算区域尺度在主流方向上取为 $21D$, 流场入口距圆柱中心为 $5D$, 横向尺寸为 $16D$ 。入口处指定沿水平方向的均匀来流 $U=1$, 垂向流速 $v=0$; 出口处

为对流边界 $\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x} = 0$;侧壁采用可滑移边界条件;圆柱表面为不可滑移边界条件。计算了 $Re = 200$ 、 $1\,000$ 、 $3\,900$ 的单圆柱绕流,对应的节点总数分别为 $12\,340$ 、 $13\,788$ 和 $24\,638$;为提高计算效率并保障计算精度,对圆柱周围及尾流区进行网格加密处理。

2.2 特征参数

表 1 给出了计算所得的平均阻力系数 $\bar{C}_d$ 、升力系数幅值 C_l 及斯特劳哈尔数 Sr ,计算公式分别为

$$C_d = - \int_0^{2\pi} p \cos \theta d\theta - \nu \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \sin \theta d\theta \quad (10)$$

$$C_l = - \int_0^{2\pi} p \sin \theta d\theta + \nu \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cos \theta d\theta \quad (11)$$

$$Sr = \frac{f_0 D}{U} \quad (12)$$

式中: f_0 为涡的自然脱落频率; ν 为运动黏性系数。

表 1 不同 Re 时本文模型计算结果与其他文献数据比较

数据 来源	$\bar{C}_d$			C_l ($Re=200$)	Sr		
	$Re=200$	$Re=1\,000$	$Re=3\,900$		$Re=200$	$Re=1\,000$	$Re=3\,900$
本文模型	1.45	1.571	1.759	± 0.65	0.192	0.226	0.243
文献[14]	1.42			± 0.66	0.202		
文献[15]	1.31			± 0.69	0.192		
文献[16]	1.32			± 0.60	0.192		
文献[17]		1.450				0.220	
文献[18]		1.510				0.250	
文献[19]		1.531				0.245	
文献[20]			1.650				0.230
文献[21]			1.827				0.255
文献[22]			1.625				

从表 1 可以看出,本文单圆柱绕流特征参数计算结果与现有文献研究成果接近。

2.3 卡门涡街流动特性

图 1 为 $Re = 200$ 、 $1\,000$ 、 $3\,900$ 时半个涡脱落周期的压力与流线形态。可以看出:不同雷诺数下,圆柱后方涡旋均产生卡门涡街流动特性,涡旋上下交替产生、发展并脱落。另外,随着雷诺数的增大,圆柱近尾流区上下交替的涡旋逐渐靠近通过圆柱几何中心的水平线,同时,涡脱落位置逐渐靠近圆柱。

3 串列双圆柱绕流 ($Re = 1\,000$) 模拟

3.1 计算区域和网格划分

图 2 为串列双圆柱绕流计算域:流场入口距上游圆柱中心 $5D$,出口距下游圆柱中心 $16D$,横向尺寸为 $16D$,两圆柱中心间距为 L 。边界条件设置与单圆柱绕流完全相同。共计算了两圆柱中心间距 $L = 2D$ 、 $2.25D$ 、 $2.5D$ 、 $4D$ 、 $5.5D$ 5 种工况,图 3 为 $L = 2D$ 的网格划分情况。

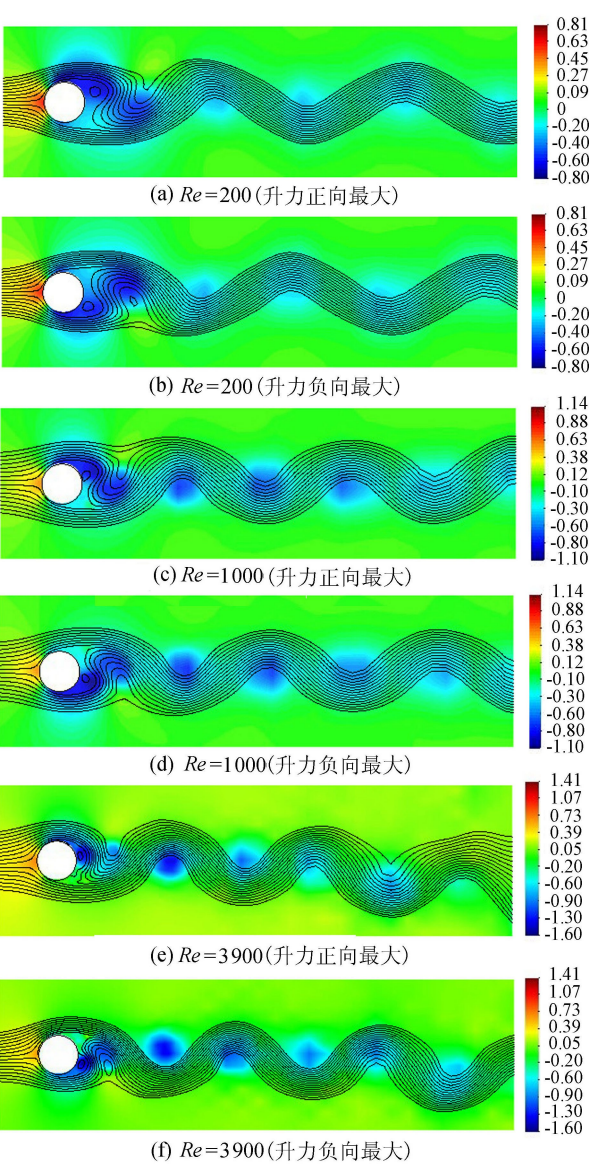


图 1 不同 Re 下半个涡脱落周期的压力与流线形态

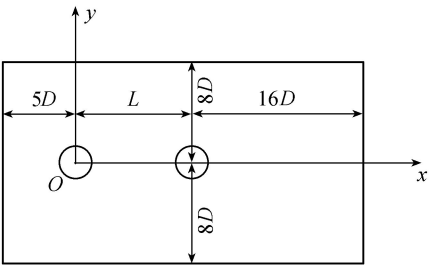
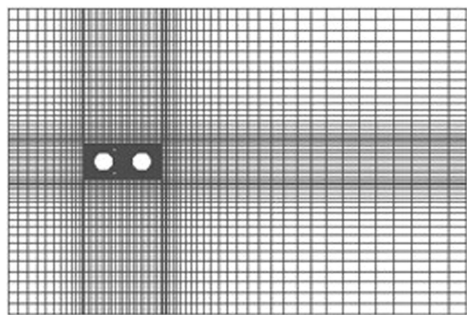


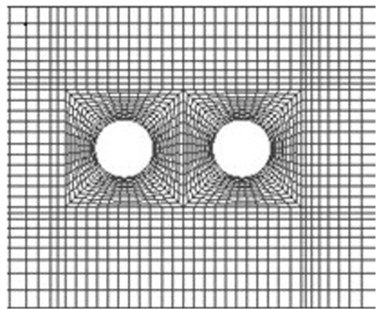
图 2 双圆柱绕流计算域

3.2 流场特征

图 4 为串列双圆柱绕流在不同间距约半个周期的流线。当 $L/D \leq 2.25$ 时(图 4(a)(b)),从上游圆柱上(下)表面通过的部分流线流至下游圆柱时,回流穿过两圆柱间隙并从下游圆柱下(上)表面通过,形成两个回流区,交替覆盖下游圆柱。当 $L/D = 2.5$ 时(图 4(c)),流线在两圆柱间隙发生“U”形转弯。与间距 $L/D \leq 2.25$ 不同的是,一部分之前通过上游



(a) 整体区域网格



(b) 圆柱周围网格

图3 模型网格划分 ($L=2D$)

圆柱上(下)表面的流线,开始穿过间隙,从下游圆柱的上(下)表面通过。当 $L/D \geq 2.5$ 时(图4(c)(d)),上游圆柱后方出现涡旋脱落。

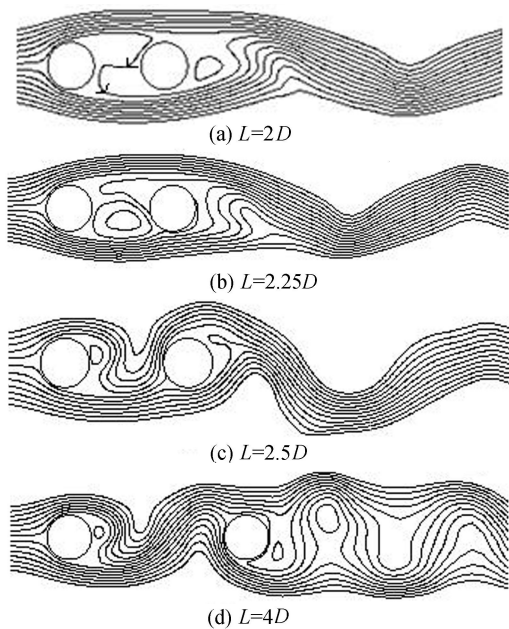


图4 不同间距下的流线

可见, $Re=1000$ 的串联双圆柱绕流,其临界间距在 $2.25D \sim 2.5D$ 之间。两圆柱间距小于临界间距时,上游圆柱后方无明显涡旋脱落;大于临界间距时,有涡旋脱落。下游圆柱始终存在涡旋脱落现象。

3.3 圆柱受力分析

图5为两圆柱平均阻力系数和升力系数幅值随 L/D 的变化曲线,可以看出本文模拟结果与相关文献计算结果吻合较好。由图5(a)可知,随着 L/D 的增大,上游圆柱平均阻力系数逐渐靠近单圆柱绕流

计算结果;下游圆柱平均阻力系数在 $L/D=2.25$ 时为负,在 $L/D=2.5$ 时突然增大为正值,之后减小且趋于稳定。由图5(b)可知,在 $L/D=2.25 \sim 2.5$ 时,上、下游圆柱升力系数幅值均突然增大;随后上游圆柱升力系数幅值逐渐趋近单圆柱绕流计算结果,下游圆柱升力系数幅值稳定后大于单圆柱绕流计算结果。

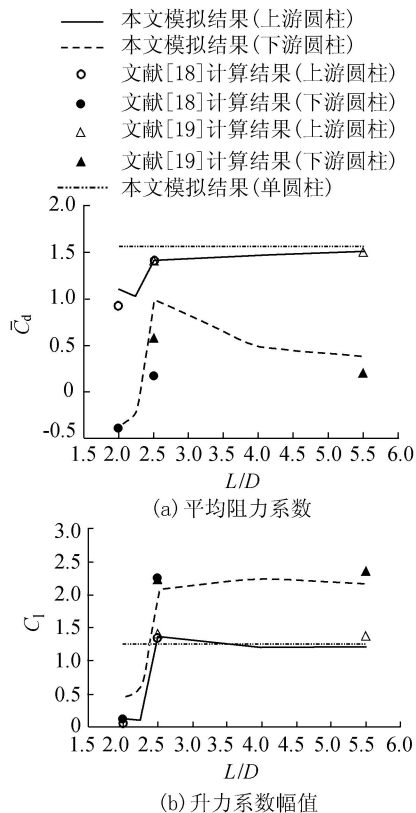


图5 平均阻力系数和升力系数幅值随间距变化的规律

以上分析表明,上、下游圆柱平均阻力系数及升力系数幅值在 $L/D=2.25 \sim 2.5$ 时均产生突变,进一步说明的串联双圆柱绕流临界间距在 $2.25D \sim 2.5D$ 之间,与 Jester 等^[18]的结果 $2.38D$ 吻合较好。

图6为两圆柱中心间距 $L=2.25D$ 时,约一个周期内 $t_1=18.47$ 、 $t_2=18.59$ 、 $t_3=18.71$ 、 $t_4=18.95$ 这4个时刻的压力云图。可以看出,间隙处压力较稳定,上游圆柱上下表面压力接近,故其升力系数幅值比单圆柱绕流小很多。同时间隙处压力低于下游圆柱近尾流区,故下游圆柱平均阻力系数为负值。下游圆柱后方涡脱落位置较远,对其背流面上下表面的压力差影响较小,故升力系数幅值较单圆柱偏小。

图7为两圆柱中心间距 $L=2.5D$ 时,约一个周期内 $t_1=9.00$ 、 $t_2=9.12$ 、 $t_3=9.18$ 、 $t_4=9.30$ 、 $t_5=9.42$ 、 $t_6=9.48$ 这6个时刻的压力云图。可以看出,上游圆柱尾流区上下表面交替出现强负压区,表明有涡旋脱落,故上游圆柱平均阻力系数及升力系数幅值接近单圆柱绕流时的平均阻力系数及升力系数幅值。下游圆柱迎流面压力相对其尾流区压力显著

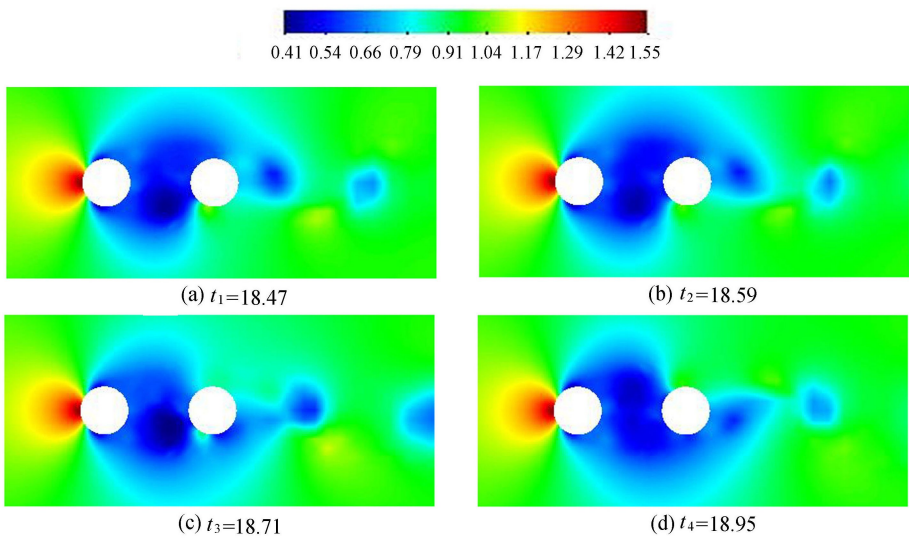


图6 $L=2.25D$ 时不同时刻的压力云图

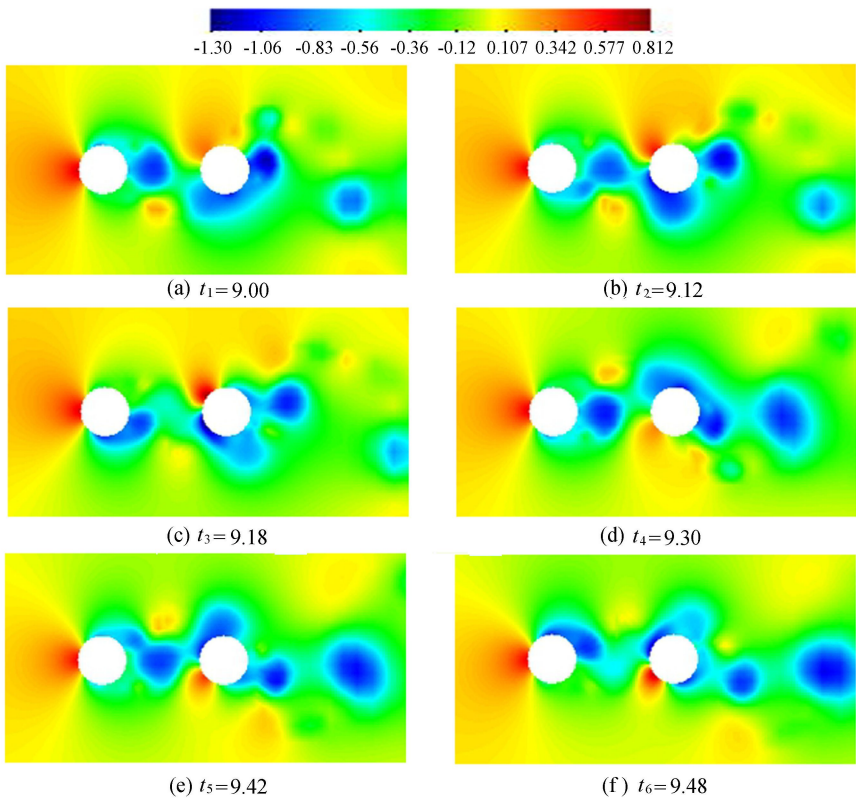


图7 $L=2.5D$ 时不同时刻的压力云图

提高,但依然低于上游圆柱迎流面压力,故下游圆柱平均阻力系数较 $L=2.25D$ 时增大但小于单圆柱绕流时的平均阻力系数。从图 7(a)(b)(c) 可以看出,下游圆柱迎流面上表面的正压力逐渐增加,下表面的负压力则逐渐减小,这对下游圆柱上下表面压力差产生叠加影响,故下游圆柱升力系数幅值剧增。

4 结 论

a. 建立了大涡模拟特征线算子分裂有限元模型,对单圆柱和串联双圆柱绕流问题进行了数值模

拟,结果与现有研究结果吻合较好。

b. 在单圆柱绕流问题中,随着雷诺数增大,圆柱近尾流区交替脱落的涡旋逐渐靠近通过圆柱中心的水平线,且涡脱落位置逐渐靠近圆柱。

c. $Re=1\,000$ 时串联双圆柱绕流临界间距在 $2.25D \sim 2.5D$ 之间,两圆柱平均阻力系数及升力系数幅值在临界间距区间产生突变。当两圆柱间距小于临界间距时,上游圆柱后方无明显涡旋脱落,间隙处压力较稳定;大于临界间距时,有涡旋脱落,上游圆柱尾流区上下表面交替出现强负压区。

参考文献:

- [1] 朱海涛,单鹏.带热传导效应平面涡轮叶栅流动直接数值模拟[J].力学学报,2013,45(5):672-680. (ZHU Haitao, SHAN Peng. Direct numerical simulation of turbining cascade flow with heat transfer effects[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2013, 45(5): 672-680. (in Chinese))
- [2] 杨金龙,赖焕新.雷诺时均模拟的两种转换模型比较[J].华东理工大学学报(自然科学版),2014,40(5):524-532. (YANG Jinlong, LAI Huanxin. Numerical investigation of transitional flow by applying two transitional for Reynolds average Navier-Stokes simulation [J]. Journal of East China University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2014, 40(5): 524-532. (in Chinese))
- [3] 胡政敏,肖志坚,陶铸,等.基于LES的亚临界和超临界圆球绕流数值模拟[J].水动力学研究与进展:A辑,2016,31(4):496-502. (HU Zhengmin, XIAO Zhijian, TAO Zhu, et al. LES investigations of flow over a sphere in the subcritical and supercritical regimes [J]. Chinese Journal of Hydrodynamics, 2016, 31(4): 496-502. (in Chinese))
- [4] MAHESH K, CONSTANTINESCU G, MOIN P. A numerical method for large-eddy simulation in complex geometries[J]. Journal of Computational Physics, 2004, 197(1):215-240.
- [5] HACHEM E, RIVAUX B, KLOCZKO T, et al. Stabilized finite element method for incompressible flows with high Reynolds number[J]. Journal of Computational Physics, 2010, 229(23):8643-8665.
- [6] WANG D G, SHUI Q X. SUPG finite element method based on penalty function for lid-driven cavity flow up to $Re=27\,500$ [J]. Acta Mechanica Sinica, 2016, 32(1):54-63.
- [7] 周桂云,李同春,钱七虎.水库滑坡涌浪传播有限元数值模拟[J].岩土力学,2013,34(4):1197-1201. (ZHOU Guiyun, LI Tongchun, QIAN Qihu. Finite element numerical simulation of water waves due to reservoir landslides[J]. 2013, 34(4): 1197-1201. (in Chinese))
- [8] ZIENKIEWICZ O C, MORGAN K, SAI B V K, et al. A general algorithm for compressible and incompressible flow: part II. tests on the explicit form [J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1995, 20(8/9):887-913.
- [9] WANG D G, WANG H J, XIONG J H, et al. Characteristic-based operator-splitting finite element method for Navier-Stokes equations [J]. Science China Technological Sciences, 2011, 54(8):2157-2166.
- [10] MALAN A G, LEWIS R W. An artificial compressibility CBS method for modeling heat transfer and fluid flow in heterogeneous porous materials [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2011, 87(1/2/3/45):412-423.
- [11] 王伟,水庆象,王大国,等.线性剪切来流对方柱绕流特性影响的数值分析[J].水利水电科技进展,2017,37(1):17-21. (WANG Wei, SHUI Qingxiang, WANG Daguo, et al. Numerical analysis of influences of linear shear flow on characteristics of flow past a square cylinder [J]. Advances in Science and Technology of Water Resources, 2017, 37(1): 17-21. (in Chinese))
- [12] SAGAUT P. Large eddy simulation for incompressible flows[M]. Heidelberg:Springer-Verlag, 2002.
- [13] SMAGORINSKY J. General circulation experiments with the primitive equations: I. the basic experiment [J]. Monthly Weather Review, 1963, 91(3):99-164.
- [14] XU S, WANG Z J. An immersed interface method for simulating the interaction of a fluid with moving boundaries [J]. Journal of Computational Physics, 2006, 216(2):454-493.
- [15] LIU C, ZHENG X, SUNG C H. Preconditioned multigrid methods for unsteady incompressible flows [J]. Journal of Computational Physics, 1998, 139(1):35-57.
- [16] HARICHANDAN A B, ROY A. Numerical investigation of low Reynolds number flow past two and three circular cylinder using unstructured grid CFR scheme [J]. International Journal of Heat and Fluid Flow, 2010, 31:154-174.
- [17] HU C, KOTERAYAMA W. Numerical study on a two-dimensional circular cylinder with a rigid and an elastic splitter plate in uniform flow [J]. International Journal of Offshore and Polar Engineering, 1994, 4(3):193-199.
- [18] JESTER W, KALLINDERIS Y. Numerical study of incompressible flow about fixed cylinder pairs [J]. Journal of Fluids and Structures, 2003, 17(4):561-577.
- [19] MITTAL S, KUMAR V, RAGHUVANSHI A. Unsteady incompressible flows past two cylinders in tandem and staggered arrangements [J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1997, 25(11):1315-1344.
- [20] KRAVCHENKO A G, MOIN P. Numerical studies of flow over a circular cylinder at $Re = 3\,900$ [J]. Physics of Fluids, 2000, 12(2):403-417.
- [21] CHEN T Q, ZHANG Q H, CHENG L. Performance investigation of 2D lattice Boltzmann simulation of forces on a circular cylinder [J]. Transaction of Tianjin University, 2010, 16(6):417-423.
- [22] BREUER M. Numerical and modeling influences on large eddy simulations for the flow past a circular cylinder [J]. International Journal of Heat and Fluid Flow, 1998, 19(98):512-521.

(收稿日期:2016-03-16 编辑:熊水斌)