

基于流速幂级数解的明渠纵向离散系数计算方法

张文俊, 胡煜, 任华堂, 夏建新

(中央民族大学生命与环境科学学院, 北京 100081)

摘要:针对纵向离散系数计算多直接采用经验公式或在流速分布的求解中引入经验公式, 不能完全反映离散物理机制的问题, 基于矩形断面一维水流控制方程, 利用幂级数求解流速分布的理论解, 提出了矩形断面明渠纵向离散系数的计算方法, 并进一步将其推广至天然河流。利用该方法计算了 104 条天然河流的纵向离散系数, 结果表明计算值与实测值处于同一量级, 计算结果在可接受范围内。

关键词:纵向离散系数; 明渠; 幂级数; 流速分布

中图分类号:TV133 **文献标志码:**A **文章编号:**1006-7647(2017)06-0044-04

Computation of longitudinal dispersion coefficient in open channels based on power series solution to velocity distribution//ZHANG Wenjun, HU Yu, REN Huatang, XIA Jianxin (College of Life and Environmental Sciences, Minzu University of China, Beijing 100081, China)

Abstract: The longitudinal dispersion coefficient is usually computed directly by empirical formulas or indirectly through introducing empirical formulas during the solution to velocity distributions, which cannot fully reflect the physical mechanisms of dispersion. Based on the one-dimensional governing equation of river dynamics, a method to calculate longitudinal dispersion coefficient involving a power series solution to velocity distribution was proposed. This formulation has been extended to the applications in 104 natural rivers with simplified rectangle cross-sections. The computed values are in the same order of magnitudes with the measured ones, indicating acceptable results.

Key words: longitudinal dispersion coefficient; open channel; power series; velocity distributions

近 10 年来, 河流突发水污染恶性事件时有发生, 不仅对河流水生生态系统造成严重破坏, 更为严重的是对下游大中城市供水安全造成威胁, 如 2005 年松花江特大突发苯污染事故、2010 年福建紫金矿业铜酸水渗漏事故、2012 年广西龙江镉污染事故等。如何模拟污染物云团在河流中的迁移过程, 准确预测污染物到达各取水口时间以及恢复供水时间, 是制定污染事故应急预案的基础。由于断面流速分布的不均匀性, 排放到河流中污染物形成的云团形状将发生变化, 即为河流的纵向离散作用。离散作用的强弱直接决定了污染云团迁移过程, 在天然河流污染物预测中, 由于计算量小、所需资料少等优点, 多采用一维纵向迁移离散方程求解, 将流速分布不均匀导致的离散作用概化为离散项, 而离散项准确求解主要依赖于纵向离散系数, 因此, 准确确定纵向离散系数对于精准预测河流突发污染的影响范围和时间具有重要意义。

天然河流纵向离散系数为河流水环境模型的关键参数, 一直是环境水力学研究中的热点问题。1954 年 Taylor^[1] 根据圆管试验基于径向扩散和纵向离散平衡首先提出了纵向离散系数的概念, Elder^[2] 将纵向离散系数的计算从圆管拓展到不考虑横向差异的明渠中, 基于垂向扩散和纵向离散的平衡得到离散系数计算公式。对于天然河流, Fischer 等^[3] 指出明渠纵向离散主要是由于纵向流速的横向分布不均匀引起的, 而流速垂向差异的影响可忽略不计, 并基于横向扩散和纵向离散的平衡推导出三重积分形式的纵向离散系数计算公式:

$$D_1 = -\frac{1}{A} \int_0^B \tilde{u} h(y) \int_0^y \frac{1}{A_H h(y)} \int_0^y h(y) \tilde{u} dy dy dy \quad (1)$$

式中: A 为断面过水面积; $\tilde{u}$ 为流速与断面平均流速的偏离值; B 为河宽; $h(y)$ 为水深; A_H 为横向扩散系数。由式(1)可知, 若已知纵向流速在横断面分布资料, 便可计算得到纵向离散系数。通过对式(1)

中复杂项的简化,得出纵向离散系数的简化计算式:

$$D_1=0.011\left(\frac{\bar{u}}{u_*}\right)^2\left(\frac{B}{H}\right)^2Hu_*\tag{2}$$

式中: $\bar{u}$ 为河流平均流速; u_* 为摩阻流速; H 为河流平均水深。

在天然河流中,由于流体运动的非线性特性,无法得到流速的分布资料。在离散系数的确定上,除了示踪试验^[4]方法之外,仍然以经验公式为主,通过量纲分析等方法将离散系数表示为河流特征参数平均流速、底部摩阻流速、水深、河宽等变量的函数^[5],通过对实测数据的拟合分析得到了一系列公式,如 Seo 等^[6]、Kashefipour 等^[7]、Sahay 等^[8]的公式,但这些公式物理意义不明确,且主要是用于特定类型的河流,不易推广。

随着对河流水动力特性认识的不断深入,基于合理假定得到流速分布特性,使得利用式(1)计算河流纵向离散系数具备可行性。邓志强等^[9]以抛物型断面河道为对象,基于谢才公式得到横断面流速分布,继而导出纵向离散系数理论公式;陈永灿等^[10]基于最大熵值原理提出确定梯形断面纵向流速分布的方法,得到梯形断面明渠纵向离散系数计算公式;Wang 等^[11]则通过矩形断面的水流控制方程,采用傅里叶级数形式表达的流速分布,求解得到纵向离散系数计算公式。

虽然相关方法在计算离散系数中都取得了一定的效果,但是在流速分布求解中均不同程度地引入了经验公式或数理原理等,而采用流体动力学方程进行流速求解再得到离散系数的公式尚不多见。本文以常见的矩形断面形态河流为对象,基于恒定均匀流条件下河流控制方程,采用幂级数形式求解得到河流流速分布,将流速分布代入式(1)求解可得矩形断面河流纵向离散系数值,并将其推广到天然河流纵向离散系数的计算。

1 纵向离散系数的幂级数求解方法

1.1 矩形断面流速分布的求解

对于图 1 所示的均匀恒定明渠流动,流速分布满足以下动力学方程:

$$-g\frac{\partial \eta}{\partial x}-\frac{\tau_{bx}}{\rho H}+\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial y}\left(HA_m\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0\tag{3}$$

式中: u 为纵向流速; τ_{bx} 为底部摩擦力; η 为水位; A_m 为涡黏系数; ρ 为水的密度。令水力坡度 $J=-\frac{\partial \eta}{\partial x}$,若假定底部摩擦力与流速的平方近似,即 $\tau_{bx}=-c_d\rho u^2$,其中 c_d 为底部拖曳力系数,则有

$$\frac{c_d u^2}{H}-gJ=\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial y}\left(HA_m\frac{\partial u}{\partial y}\right)\tag{4}$$

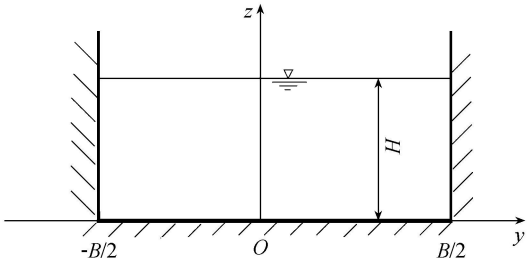


图 1 矩形河流断面示意图

令 $y'=2y/B$,对河宽进行归一化,式(4)化为

$$\frac{c_d u^2}{H}-gJ=\frac{4A_m}{B^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y'^2}\tag{5}$$

设 $u=\sum_{i=0}^{+\infty}a_{2i}y'^{2i}$,其中 a_{2i} 为待定的幂级数系数,量纲与流速相同,代入式(5)中,由式(5)两侧同一幂次前系数相等,得到:

$$a_2=\frac{B^2}{8A_m}\left(\frac{c_d a_0^2}{H}-gJ\right)\tag{6}$$

$$a_{2i}=\frac{c}{8i(2i-1)}\sum_{j=0}^{i-1}a_{2j}a_{2(i-1-j)}\quad(i\geqslant 2)\tag{7}$$

其中

$$c=\frac{c_d B^2}{A_m H}$$

由式(7)可知 $\sum_{i=0}^{+\infty}a_{2i}y'^{2i}$ 的收敛性主要取决于 c 值,由于非线性作用,难以准确确定其收敛域。计算结果表明当 $c<1200$ 时, $u=\sum_{i=0}^{+\infty}a_{2i}y'^{2i}$ 在 $[-1,1]$ 内收敛,对于大多数计算工况而言,都能满足这一条件。

因此,当 $y'=\pm 1$ 时,幂级数 $\sum_{i=0}^{+\infty}a_{2i}y'^{2i}$ 在闭区间 $[-1,1]$ 绝对收敛,该幂级数为矩形断面纵向流速 u 的解。

当断面最大流速 $u_{\max}$ 已知时,则系数 $a_0=u_{\max}$,再代入式(6)和式(7),即可得到不同幂次的系数;当 $u_{\max}$ 未知时,利用岸边界位置流速为零的条件,得到

$$\sum_{i=0}^{+\infty}a_{2i}=0\tag{8}$$

联立式(6)(7)(8),可以得到不同幂次项的系数。在实际应用求解中,幂级数项数一般可取 6~10 项,而对于宽深比较大的河流,所取项数则相应增加。

将计算工况设置为 $H=1.0\text{ m}$,改变宽深比 $B/H=10、50、100、150、200$, $A_m=1.0\text{ m}^2/\text{s}$, $c_d=0.001$, $J=0.00075$,计算结果如图 2 所示。由图可 2 见,随宽深比增加,断面流速更加均匀;当深度一定时,随着河宽的增加,水流受岸边摩擦力的影响减弱,流速

分布更加趋于均匀,符合水流的运动规律,说明所得到的幂级数解是合理的。

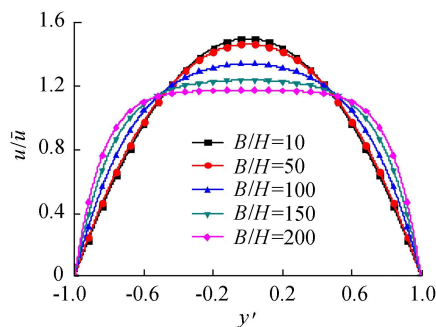


图2 矩形断面纵向流速分布

1.2 矩形断面纵向离散系数计算

根据断面纵向流速的横向分布,利用式(1)求解纵向离散系数 D_1 。已知 $u = \sum_{i=0}^{\infty} a_{2i} y'^{2i}$,可以得到平均流速 $\bar{u} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u dy' = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_{2i}}{2i+1}$,对横断面纵向流速偏离值 $\hat{u}$ 进行无量纲化处理可得 $\hat{u}$:

$$\hat{u} = \frac{1}{\bar{u}} \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{2i} y'^{2i} - \bar{u} \right) \quad (9)$$

将其代入式(1),可得:

$$D_1 = -\frac{\bar{u}^2}{A_H B} \left(\frac{B}{2} \right)^3 \int_{-1}^1 \hat{u} dy' \int_{-1}^1 \hat{u} dy' dy' \quad (10)$$

令 $I = \int_{-1}^1 \hat{u} \int_{-1}^1 \hat{u} dy' dy' dy'$, 则有

$$D_1 = -\frac{\bar{u}^2}{A_H B} \left(\frac{B}{2} \right)^3 I \quad (11)$$

其中,三重积分

$$I = \frac{2}{\bar{u}^2} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_{2j} a_{2i}}{(2i+1)(2i+2)(2i+2j+3)} - \frac{\bar{u}}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_{2j}}{2j+3} + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_{2i} a_{2j}}{(2j+1)(2i+1)} - \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_{2j} a_{2i}}{(2j+1)(2i+1)(2i+2)} - \frac{\bar{u}}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_{2j}}{2j+1} - \bar{u} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_{2i}}{(2i+1)(2i+2)(2i+3)} - \bar{u} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_{2i}}{2i+1} - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_{2i}}{(2i+1)(2i+2)} \right] + \frac{2\bar{u}^2}{3} \right\} \quad (12)$$

2 天然河流纵向离散系数计算

2.1 计算条件

为了将纵向离散系数求解公式(11)推广到天然河流中,考虑到天然河流断面和矩形断面的差异性,参数按照以下方式确定:底部阻力系数 $c_d = 0.7(u_*'/\bar{u})^2$,涡黏系数 $A_m = 2.0Hu_*$,水力坡度 $J =$

$u_*'^2/gH$,横向扩散系数 $A_H = 0.15Hu_*'$ [3,8-9]。由此根据文献[12]收集的资料,采用式(11)计算了104条天然河流的纵向离散系数值。

2.2 结果与讨论

为分析本文计算方法计算结果的精度,采用对数比偏差 K_{DR} 、对数平均绝对误差 M_e 和对数均方根 R_{ms} 这3个统计指标进行评价,定义如下:

$$K_{DR} = \lg \frac{D_{lp}}{D_{lm}} \quad (13)$$

$$M_e = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |K_{DRi}| \quad (14)$$

$$R_{ms} = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N K_{DRi}^2} \quad (15)$$

式中: D_{lp} 为本文公式计算值; D_{lm} 为实测值。

对数比偏差反映计算值与实测值的接近程度,当计算值与实测值之比越接近1时,则 K_{DR} 越接近0,而 $K_{DR} \in (-0.3, 0.3)$ 时,则计算值与实测值比值为0.5~2。对数平均绝对误差反映出计算值与实测值的整体偏离情况,对数均方根反映计算值与实测值的离散情况,对数平均绝对误差和对数均方根值越接近于0,说明计算值与实测值越接近,方程预测效果越好。

将本文公式计算值与实测值比较(图3),可见本文公式计算值较为均匀地分布在实测值两侧,但也存在一定的偏离,这主要是由于本文流速的幂级数解是基于矩形断面均匀流假定得到的,而天然河流的断面形式多种多样,将其统一概化为水面宽度与平均水深的矩形断面,会出现一定程度的失真,纵向离散系数的计算值和实测值之间存在一定的误差。

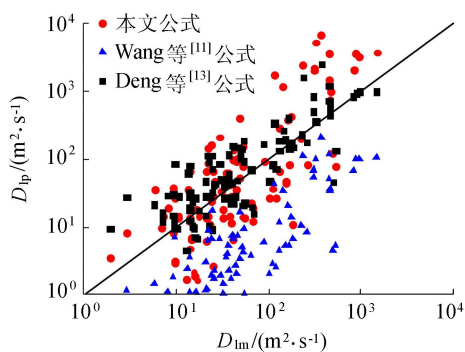


图3 纵向离散系数计算值与实测值的比较

将本文公式计算值与理论性较强的 Wang 等 [11]、Deng 等 [13] 的公式计算值进行了比较,结果见图3。由图3可看出,本文公式计算精度优于 Wang 等 [11] 的公式,但和 Deng 等 [13] 的公式相比则偏低。这是由于 Deng 等 [13] 的公式在离散系数的推导中流速分布由谢才公式计算,而谢才公式基于天然河流大量数据得到,对于自然河流具有更好的适用性。

表 1 不同纵向离散系数经验公式对比分析

计算公式	M_e	R_{ms}	K_{DR} 各范围比例/%					
			$(-\infty,-1]$	$(-1,-0.3]$	$(-0.3,0]$	$(0,0.3]$	$(0.3,1]$	$(1,+\infty)$
Fischer ^[3] 公式	0.57	0.069	0	22	6	5	42	26
Seo 等 ^[6] 公式	0.34	0.039	0	13	7	19	55	7
Kashefipour 等 ^[7] 公式(1)	0.38	0.047	3	37	16	8	29	7
Kashefipour 等 ^[7] 公式(2)	0.32	0.040	0	29	12	11	38	10
Sahay 等 ^[8] 公式	0.32	0.037	3	17	8	15	54	4
Wang 等 ^[11] 公式(1)	1.18	0.120	80	19	0	0	0	0
Wang 等 ^[11] 公式(2)	0.28	0.034	4	28	13	18	32	5
Deng 等 ^[13] 公式	0.31	0.036	4	20	11	14	51	0
Liu ^[14] 公式	0.43	0.052	4	20	10	14	49	3
本文公式	0.46	0.054	10	42	6	4	34	5

本文的流速幂级数解是基于矩形断面均匀流条件下的动力学方程得到的,故在将自然河流概化为矩形断面过程中出现了一定程度的失真。尽管如此,由于流速分布公式的物理意义相较谢才公式更为明确且计算精度总体不低于其他公式,本文计算方法仍然具有一定的意义。

为进一步分析 K_{DR} 的误差与宽深比的关系,图 4 给出了不同宽深比下的误差分布情况。当宽深比较小时,本文公式计算值和 Deng 等^[13]的公式计算值与实测值偏差处在相对合理的区间,而当宽深比大于 100 时,则所有理论公式计算结果的误差都会增大。

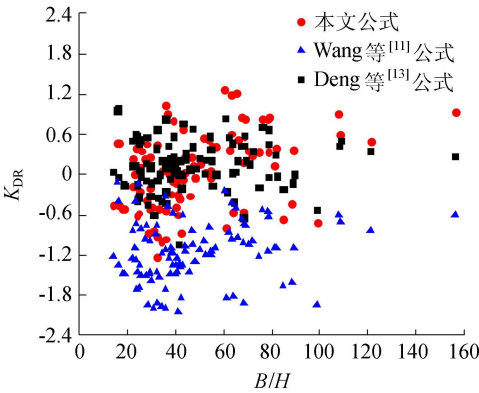


图 4 对数比偏差与宽深比的关系

本文公式计算值与前人公式的计算值对比分析见表 1,本文公式对于 104 条天然河流计算值的 K_{DR} 分布在 $(-1,1)$ 区间的比例为 90%,即计算值与实测值基本在一个量级,与其他传统公式在同一水平;对数平均绝对误差 M_e 为 0.46,即本文公式整体计算值在实测值的 0.34~2.8 倍之间;对数均方根 R_{ms} 为 0.054,计算结果波动性不大,与各传统公式计算值误差相比相差不大,处于居中水平。

3 结 语

基于一维均匀恒定流控制方程,利用幂级数解法得到断面流速分布表达式,该解法能够较好地反映流体运动的力学机制,且形式简单,易于计算,与

天然河流流动规律相吻合。通过将流速分布的幂级数解代入 Fischer 理论公式推导了矩形明渠纵向离散系数计算方法,该方法物理机制明确,可根据精度要求确定求解项数。将该纵向离散系数计算方法推广到天然河流中,并利用 104 条天然河流的实测资料进行了验证,结果显示计算值和实测值量级一致,能够反映天然河流的离散特性。

参考文献:

[1] TAYLOR G. The dispersion of matter in turbulent flow through a pipe[J]. Proceedings of the Royal Society of London, 1954, 223(1155):446-468.

[2] ELDER J W. The dispersion of marked fluid in turbulent shear flow[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1959, 5(4): 544-560.

[3] FISCHER H B, LIST J, KOHR C Y, et al. Mixing in inland and coastal water [M]. New York: Academic Press, 1979:81-147.

[4] 李骏旻,黄平,李毅能,等. 近似拟合法确定离散系数的适用性和选点策略[J]. 水利水电科技进展,2008, 28(5):10-12. (LI Junmin, HUANG Ping, LI Yineng, et al. Applicability of approximate fitting method in estimation of longitudinal diffusivity coefficient [J]. Advances in Science and Technology of Water Resources, 2008, 28(5):10-12. (in Chinese))

[5] 顾莉,华祖林. 天然河流纵向离散系数确定方法的研究进展[J]. 水利水电科技进展,2007,27(2):85-89. (GU Li, HUA Zulin. Advances in determination of longitudinal dispersion coefficient of natural rivers [J]. Advances in Science and Technology of Water Resources, 2007, 27(2):85-89. (in Chinese))

[6] SEO I W, CHEONG T S. Predicting longitudinal dispersion coefficient in natural streams [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1998, 124(1):25-32.

[7] KASHEFIPOUR S M, FALCONER R A. Longitudinal dispersion coefficients in natural channels [J]. Water Research, 2002, 36(6):1596-608.

(下转第 53 页)

- Huashu, WANG Hong, LI Ming. Surface disease on hydraulic concrete structure and its general ageing[J]. Hydropower, 2001(2):57-60. (in Chinese))
- [6] 张瀚,陈建康,高策,等.基于熵权集的大坝分部位动态健康评价方法研究[J].四川大学学报(工程科学版), 2014,46(6):56-62. (ZHANG Han, CHEN Jiankang, GAO Ce, et al. A dynamic health evaluation method research of dam division based on entropy weight set[J]. Journal of Sichuan University (Engineering Science Edition), 2014,46(6):56-62. (in Chinese))
- [7] 邢林生.七座大坝老化病害工程治理特点分析[J].大坝与安全,2008(3):20-24. (XING Linsheng, Analysis on treatment of seven ageing diseased dams[J]. Dam and Safety, 2008(3):20-24. (in Chinese))
- [8] 宋恩来.东北几座混凝土坝老化与加固效果分析[J].大坝与安全,2006(1):46-49. (SONG Enlai. Ageing on several concrete dams in northeastern China and reinforcement analysis[J]. Dam and Safety, 2006(1):46-49. (in Chinese))
- [9] 马保国,高小建,何忠茂,等.混凝土在 SO_4^{2-} 和 CO_3^{2-} 共同存在下的腐蚀破坏[J].硅酸盐学报,2004,32(10):1119-1124. (MA Baoguo, GAO Xiaojian, HE Zhongmao, et al. Corrosion damage of concrete in presence of SO_4^{2-} and CO_3^{2-} [J]. Journal of the Chinese Ceramic Society, 2004,32(10):1119-1124. (in Chinese))
- [10] 宋汉周,朱旭芬,彭鹏,等.坝址渗水析出物及其潜在影响研究[J].水利学报,2011,42(4):454-460. SONG Hanzhou, ZHU Xufen, PENG Peng, et al. Study on seepage colloid around dam-site and its potential effects [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2011,42(4):454-460. (in Chinese)
- [11] 宋汉周.大坝坝址地下水析出物检测方法[J].水电能源科学,2004(4):43-46. (SONG Hanzhou. Methods for monitoring of elute from groundwater around dam-site[J]. Water Resources and Power, 2004(4):43-46. (in Chinese))
- [12] 宋汉周,王凤波,周剑.某水电站大坝6坝段化灌加强帷幕防渗耐久性分析[J].水文地质工程地质,2005,32(5):69-74. (SONG Hanzhou, WANG Fengbo, ZHOU Jian. Analysis of anti-seepage durability with chemical materials in dam section 6 of a hydroelectric station[J]. Hydrogeology and Engineering Geology, 2005,32(5):69-74. (in Chinese))
- [13] 包腾飞,顾冲时,吴中如.李家峡大坝6号坝段坝基扬压力异常成因综合分析[J].岩土工程学报,2008,30(10):1460-1466. (BAO Tengfei, GU Chongshi, WU Zhongru. Analysis of uplift pressure anomaly of Lijiaxia Dam foundation [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2008,30(10):1460-1466. (in Chinese))
- [14] 彭鹏,单治钢,王永明,等.基于饱和指数模型的坝基帷幕体防渗效果及耐久性研究[J].岩土力学,2013,34(1):221-226. (PENG Peng, SHAN Zhigang, WANG Yongming, et al. Anti-seepage effect of curtain under dam foundation and its durability based on saturation index model[J]. Rock and Soil Mechanics, 2013,34(1):221-226. (in Chinese))
- [15] HUO J X, SONG H Z, LUO L. Investigation of groundwater chemistry at a dam site during its construction: a case study of Xiangjiaba Dam, China[J]. Environmental Earth Sciences, 2015,74(3):1-11.
- (收稿日期:2016-12-21 编辑:熊水斌)

(上接第47页)

- [8] SAHAY R R, DUTTA S. Prediction of longitudinal dispersion coefficients in natural rivers using genetic algorithm[J]. Hydrology Research, 2009,40(6):544-552.
- [9] 邓志强,褚君达.河流纵向分散系数研究[J].水科学进展,2001,12(2):137-142. (DENG Zhiqiang, CHU Junda. Longitudinal dispersion coefficient in natural rivers [J]. Advances in Water Science, 2001,12(2):137-142. (in Chinese))
- [10] 陈永灿,朱德军.梯形断面明渠中纵向离散系数研究[J].水科学进展,2005,16(4):511-517. (CHEN Yongcan, ZHU Dejun. Study on longitudinal dispersion coefficient in open channel trapezoidal cross-section [J]. Advances in Water Science, 2005,16(4):511-517. (in Chinese))
- [11] WANG Y, HUAI W. Estimating the longitudinal dispersion coefficient in straight natural rivers[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2016,142(11):04016048.
- [12] ZENG Yuhong, HUAI Wenxing. Estimation of longitudinal dispersion coefficient in rivers [J]. Journal of Hydro-Environment Research, 2014,8(1):2-8.
- [13] DENG Zhiqiang, SINGGH V P, BENGTSSON L. Longitudinal dispersion coefficient in straight rivers[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2001,127(11):919-927.
- [14] LIU H. Predicting dispersion coefficient of streams [J]. Journal of the Environmental Engineering Division, 1977,103(1):59-69.
- (收稿日期:2016-12-11 编辑:熊水斌)