

DOI:10.3880/j.issn.1004-6933.2017.03.009

基于改进的共轭梯度算法重构地下水污染源项

邢利英^{1,2}, 张国珍¹

(1. 兰州交通大学环境与市政工程学院, 甘肃 兰州 730070; 2. 南阳师范学院土木与建筑工程学院, 河南 南阳 473061)

摘要:针对地下水污染源项的识别问题,为重构非恒定地下水污染源项,采用有限差分格式离散方程,同时附加终端观测值,利用改进的共轭梯度算法反演地下水的污染源项。结果表明:对于连续以及不连续不可导的污染源项均能够被重构;此外,考虑测量误差的影响,数值结果显示在有测量误差的情况下,该算法也能较好地反演污染源项,充分说明改进的共轭梯度算法反演地下水污染源项是有效的。

关键词:地下水;污染源项;重构;反问题;共轭梯度法

中图分类号:X523 文献标志码:A 文章编号:1004-6933(2017)03-0042-05

Reconstruction of groundwater pollution source term with improved conjugate gradient algorithm

XING Liying^{1,2}, ZHANG Guozhen¹

(1. School of Environmental and Municipal Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China;
2. School of Civil and Architecture Engineering, Nanyang Normal University, Nanyang 473061, China)

Abstract: In order to reconstruct the unsteady pollution source term of groundwater for its identification, the finite difference scheme was used to discretize the equations, terminal observed data were appended, and an improved conjugate gradient algorithm was used to reconstruct the pollution source term. The results show that, whether the pollution source term is a continuous function or a discontinuous and non-differentiable function, it can be reconstructed. In addition, with consideration of measurement errors, the proposed method can reconstruct the source term effectively, indicating that the improved conjugate gradient algorithm is effective in reconstructing the groundwater pollution source term.

Key words: groundwater; pollution source term; reconstruction; inverse problem; conjugate gradient algorithm

随着现代化的快速发展,大量工农业污染物的排放导致地下水污染严重。地下水中污染物的迁移过程作用时间长,影响范围大,在迁移过程中还涉及水文地理条件、物理反应、化学反应等诸多因素,使得污染物迁移过程变得极为复杂,并表现出非线性行为。由于地下水系统本身的隐藏性和复杂性,地下水污染并没有引起业界足够的重视。最近的一份调查报告显示,作为主要淡水资源之一的地下水已经被氮、碳氢化合物、有毒有害的微量元素严重污染,并且呈现出由点到面、由城镇向农村发展的趋势,所以此类问题变得越来越棘手^[1-4]。

事实上,在地下水污染物的实际测量中,有很多信息难以准确测量,甚至无法测量,然而可以通过一些已知信息来确定未知的信息,所以在地下水的反问题研究中包含参数识别、边界确定、源项识别等几类问题,而污染源项识别问题在地下水污染中具有特殊的意义。目前已有大量的文献研究地下水污染源的识别问题,Li等^[5]应用全域多元二次曲面方法反演污染源项;Hazart等^[6]设计基于马尔科夫链的贝叶斯参数识别法重构点源的位置、释放时间和源强的大小;王建平等^[7]基于马尔科夫链的贝叶斯方法进行了水质参数的不确定性研究;李子等^[8]采用

基金项目:国家自然科学基金(51468033)
作者简介:邢利英(1980—),女,讲师,博士研究生,主要从事环境水力学方面研究。E-mail: lyxing2011@163.com

时空全域径向基函数配点法构造惩罚函数,通过搜寻形状因子和比例因子来确定污染源项的位置及强度;Zeng 等^[9]采用稀疏网格差值的贝叶斯方法确定污染源项。关于污染源项反演的其他方法请参考文献[10-14]。然而,之前的研究中很少采用改进的共轭梯度法反演污染源项。

共轭梯度法在数学理论分析中应用较多,Deng 等^[15]采用共轭梯度方法重构了传热方程的辐射项系数,数值结果表明该方法有效地反演了辐射项系数;Yang 等^[16]应用共轭梯度方法重构传热方程的源项。本文设计一种改进的共轭梯度方法反演地下水污染源项。

1 地下水污染控制方程

地下水污染溶质的运输和迁移过程是一个相当复杂的物理化学过程,主要包括对流、扩散、吸附、交换和其他的物理化学过程。简单起见,这里只考虑沿主流方向,结合初边界条件,污染物迁移模型可用一维非稳定对流扩散方程表示:

$$\begin{cases} \frac{\partial c(x,t)}{\partial t} - a_L v \frac{\partial^2 c(x,t)}{\partial x^2} + v \frac{\partial c(x,t)}{\partial x} + \lambda c(x,t) = \frac{q(x)}{n_e} & (x,t) \in Q \\ c(0,t) = f_1(t) & t \in [0,T] \\ c(L,t) = f_2(t) & t \in [0,T] \\ c(x,0) = \varphi(x) & x \in [0,L] \end{cases} \quad (1)$$

式中: $c(x,t)$ 为测点 (x,t) 的污染物浓度,mg/L; $q(x)$ 为污染源项,仅考虑为空间变量的函数,mg/(L·s); a_L 为污染物沿 x 方向的扩散度,m; v 为地下水实际的流速,m/s,通过水动力模型计算给出; λ 为污染物的衰减系数,s⁻¹; n_e 为有效地孔隙率,无量纲; Q 为计算区域; T 为溶质输运时间,s; L 为主流方向长度,m; $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 为边界条件; $\varphi(x)$ 为初始条件。

简言之,如果方程组(1)中的参数 a_L 、 v 、 λ 、 n_e 、 $q(x)$ 以及初边界条件均已知,则方程组(1)构成一个正问题,可以通过实验和数值模拟的方法预测污染物浓度 $c(x,t)$ 。然而,大多数情况下,地下水的污染源项并不能准确地获得,因此可以通过已知的参数和初边界条件推测未知的污染源项,方程组(1)则转变为一个反问题。

解决上述反问题,通常可以附加一组容易获得的终端观测值,一般应用如下的形式:

$$c_T(x) = c(x,T) \quad (2)$$

式中, $c_T(x)$ 为终端观测值。

由此,式(1)和(2)就构成了一个关于源项识别的反问题,可以应用迭代的方法求解。

2 差分方程

假设计算区域为 $Q = [0,L] \times [0,T]$,用有限差分法求解偏微分方程的源项识别问题,首先对计算区域 Q 进行网格剖分。将区域 Q 划分 $M \times N$ 等分,则空间步长和时间步长分别为 $h = \frac{L}{M}$ 和 $\tau = \frac{T}{N}$,测点 (x_j, t_n) 是网格节点。

$$x_j = jh \quad j = 0, 1, \dots, M \quad (3)$$

$$t_n = n\tau \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (4)$$

式中: h, τ 分别为空间步长和时间步长; M, N 为两个整数。则方程组(1)中的第一个式子可转化如下简单的形式:

$$c_i - a_L v c_{xx} + v c_x + \lambda c = \frac{q(x)}{n_e} \quad (x,t) \in Q \quad (5)$$

式中: c_i 、 c_{xx} 、 c_x 分别为污染物浓度 c 关于时间的一阶导数、空间的二阶导数、空间的一阶导数。四点隐格式的差分方程为

$$\begin{aligned} & \frac{c_j^{n+1} - c_j^n}{\tau} - a_L v \frac{c_{j-1}^{n+1} - 2c_j^{n+1} + c_{j+1}^{n+1}}{h^2} + \\ & v \frac{c_{j+1}^{n+1} - c_{j-1}^{n+1}}{2h} + \lambda c_j^n = \frac{q_j}{n_e} \\ & 1 \leq j \leq M, 1 \leq n \leq N \end{aligned} \quad (6)$$

方程(6)可变形为

$$\begin{aligned} & (-s-r)c_{j-1}^{n+1} + (1+2r)c_j^{n+1} + (s-r)c_{j+1}^{n+1} = \\ & (1-\lambda\tau)c_j^n + \tau \frac{q_j}{n_e} \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $r = a_L v \frac{\tau}{h^2} \quad s = v \frac{\tau}{2h}$

初边值条件离散如下:

$$\begin{cases} c_j^0 = \varphi_j & j = 1, 2, \dots, M \\ c_0^n = f_1(t_n) & n = 1, 2, \dots, N \\ c_M^n = f_2(t_n) & n = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (8)$$

联合式(7)和(8),则差分方程可表示为

$$A C^{n+1} = (1-\lambda\tau) C^n + \tau G + H^{n+1} \quad (9)$$

其中 $C^{n+1} = (c_1^{n+1}, c_2^{n+1}, \dots, c_{M-1}^{n+1})^T$, $C^n = (c_1^n, c_2^n, \dots, c_{M-1}^n)^T$, $G = \left(\frac{q_1}{n_e}, \frac{q_2}{n_e}, \dots, \frac{q_{M-1}}{n_e} \right)^T$, $H^{n+1} = ((s+r)c_0^{n+1}, 0, \dots, 0, (r-s)c_M^{n+1})^T$ 。

A 为典型的三对角系数矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 1+2r & s-r & & & \\ -s-r & 1+2r & s-r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -s-r & 1+2r & s-r \\ & & & -s-r & 1+2r \end{bmatrix} \quad (10)$$

由于隐格式的差分方程是无条件稳定的,因此可应用任意步长求解线性方程(9)。下面将详细地介绍改进的共轭梯度算法。

3 改进的共轭梯度算法

共轭梯度算法由 Fletcher 等^[17]首次提出的,作为一种简单有效的迭代技术,广泛应用于地理学和传热学方程的源项及扩散项系数反演。在大中型线性和非线性的无约束优化问题中,共轭梯度算法尤其有效。共轭梯度算法的基本思路为结合共轭性和最速下降法,构建一组共轭负梯度方向,沿着下降的方向寻找目标函数的最小值,合适终止条件的共轭梯度法实际上是一类迭代正则化方法。鉴于共轭梯度的特点,本文拟进一步改进共轭梯度算法重构地下水污染源项。

设非线性优化问题的控制方程可以表示为

$$F(x)=y \quad y \in Y \tag{11}$$

其中 $D(F):X \rightarrow Y$ 为一有界线性算子, X 和 Y 属于 Hilbert 空间。对于 $x \in X$,通常设 F 为一连续性的算子,所以上述非线性优化问题可转化为

$$\min_{x \in X} f(x):=\min \frac{1}{2}\left\|F(x)-y^{\delta}\right\|^2 \tag{12}$$

式中: $f(x): \boldsymbol{R}^n \rightarrow \boldsymbol{R}$ 是一连续可微的函数; $\|\cdot\|$ 为欧几里得模数; δ 为误差范围。

尤其是当 n 很大时,共轭梯度相当有效,式(12)则可转化为

$$x_{k+1}=x_k+\alpha_k d_k \tag{13}$$

其中

$$d_k=\left\{\begin{array}{ll} -g_k & k=1 \\ -g_k+\beta_k^{\text{PRP}} d_{k-1} & k \geq 2 \end{array}\right. \quad \beta_k^{\text{PRP}}=\frac{g_k^{\text{T}} y_{k-1}}{\left\|g_{k-1}\right\|^2}$$

式中: $g_k=\nabla f\left(x_k\right)$ 为目标函数的梯度; $y_{k-1}=g_k-g_{k-1}$ 为梯度变化; α_k 和 β_k^{PRP} 分别为步长和标量; $\left\|g_k-g_{k-1}\right\|_{L^2(0, L)} \leq \delta$ 为观测值的先验值^[18]。常用的共轭梯

度算法中采用 $\beta_k^{\text{FR}}=\frac{\left\|g_k\right\|^2}{\left\|g_{k-1}\right\|^2}$ ^[19] 作为搜索步长,虽

然经典的共轭梯度算法具有较好的理论收敛性,但由于可能连续产生小步长,导致数值结果并不理想。

而改进的共轭梯度则采用 $\beta_k^{\text{PRP}}=\frac{g_k^{\text{T}} y_{k-1}}{\left\|g_{k-1}\right\|^2}$ 作为搜索步长,当算法产生小步长时,改进的共轭梯度产生的搜索方向可以自动靠近负梯度方向,从而具有自动开始搜索功能,能够有效地避免连续小步长现象,数值表现较好。

详细的改进共轭梯度算法步骤^[15,20]如下:

步骤 1: 设 $k=0$, 选择一个迭代初始值 $q_0(x)=0, x \in[0, L]$;

步骤 2: 求解初边值问题(式(1)), 得到其解 c_k , 此时 $q(x)=q_k(x)$;

步骤 3: 确定残差 $r_k=g^{\delta}-c_k$, 求解下面的共轭方程, 其解为 $u_k(x, t)$;

$$\left\{\begin{array}{l} -u_t-a_{\mathrm{L}} v u_{x x}-v u_x+\lambda u=\frac{g^{\delta}-c_k}{n_{\mathrm{e}}}(x, t) \in Q \\ u(x, 0)=0 \\ u(0, t)=f_1(t) \\ u(L, t)=f_2(t) \end{array}\right. \tag{14}$$

步骤 4: 计算 $s_k=u_k+\alpha_{k-1} s_{k-1}$, 其中

$$\alpha_{k-1}=\left\{\begin{array}{ll} 0 & k=0 \\ \frac{\left\|u_k\right\|_{L^2(0, L)}^2}{\left\|u_{k-1}\right\|_{L^2(0, L)}^2} & k \geq 1 \end{array}\right. \tag{15}$$

步骤 5: 求解下列方程组

$$\left\{\begin{array}{l} c_t-a_{\mathrm{L}} v c_{x x}+v c_x+\lambda c=\frac{s_k}{n_{\mathrm{e}}}(x, t) \in Q \\ c(x, 0)=0 \\ c(0, t)=f_1(t) \\ c(L, t)=f_2(t) \end{array}\right. \tag{16}$$

并得到其解为 $c:=d_k(x, t)$, 令

$$\beta_k^{\text{PRP}}=\frac{u_k w_{k-1}}{\left\|d_k\right\|_{L^2(0, L)}^2}=\frac{u_k\left(u_k-u_{k-1}\right)}{\left\|d_k\right\|_{L^2(0, L)}^2} \tag{17}$$

其中 $w_{k-1}=u_k-u_{k-1}$, 则有 $q_{k+1}=q_k+\beta_k s_k$ 。

步骤 6: 增加迭代次数 k , 执行循环到步骤 2。任取 $\gamma>1$, 当 $k \in N$, 第一次满足 $\left\|g^k-g\right\|_{L^2(0, L)} \leq \gamma \delta$ 时终止循环。

4 算 例

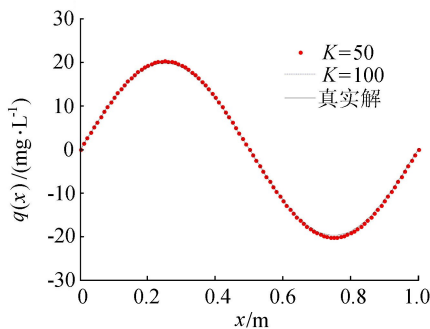
本文设计了 3 个算例来检验上述算法的有效性。

a. 试验 1。采用一假设的数值算例验证改进共轭梯度法的有效性, 控制方程如下:

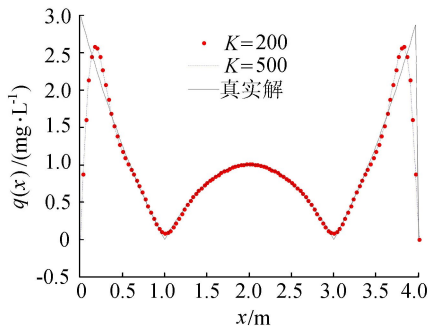
$$\left\{\begin{array}{ll} c_t-a(x) c_{x x}=q(x) & (x, t) \in Q=[0, 1] \times[0, 1] \\ c(x, 0)=\varphi(x) & x \in[0, 1] \\ c(0, t)=c(L, t)=0 & t \in[0, 1] \end{array}\right. \tag{18}$$

当式(18)取第一组参数: $a(x)=1, \varphi(x)=\sin (2 \pi x), q(x)=2 \pi^2 \sin (2 \pi x)$, 时间步长和空间步长分别取 $1 / 100 \mathrm{~s}$ 和 $1 / 100 \mathrm{~m}$, 应用改进的共轭梯度算法反演污染源项的结果见图 1(a)。从图 1(a)中可以看出, 当迭代次数 $K=50$ 时, 反演结果已经很好地与真实解吻合。

当取第二组参数: $\varphi(x)=\sin (x), q(x)=|(x-1)(x-3)|, x \in[0, 4]$, 则反演结果见图 1(b)。从图 1(b)中可以看出, 除了 2 个不可导点, 源项被较好地反演。以上 2 组试验很好地说明了共轭梯度法



(a) 第一组参数



(b) 第二组参数

图1 试验1的反演结果

能有效地反演控制方程源项,可以应用到实际问题源项的重构中。

b. 试验2.对淄博沭水南部地区的地下水硫酸污染源强度进行数值反演,相关数据参考文献[21]。根据计算区域的水文地质条件,取 $x=4000$ m, $T=11$ a,并取 $\alpha_L=1$ m, $u=1$ m/d, $n_e=0.25$,空间步长 $h=100$ m,时间步长 $\tau=0.5$ a。通过线性拟合,初边值条件表达式为

$$\begin{cases} \varphi(x) = 0.0715x + 45.6 & 0 \leq x \leq 4000 \\ f_1(t) = 7.96t + 45.6 & 0 \leq t \leq 11 \\ f_2(t) = 1.75t^2 + 331.6 & 0 \leq t \leq 11 \end{cases} \quad (19)$$

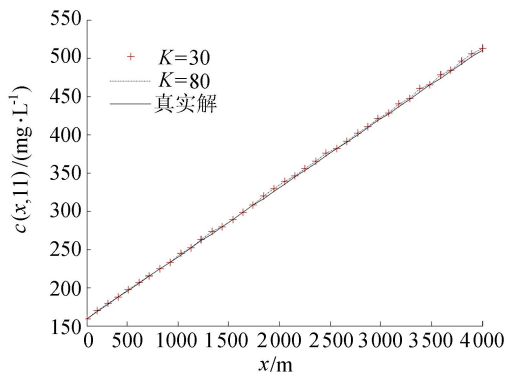
附加终端观测值为拟合后的线性函数 $c(x, 11) = 0.1026x + 152$ 。

应用改进的共轭梯度算法进行反演,附加数据和反演结果的对比如图2。从图2中可以看出当迭代次数 $K=30$ 时,污染源项已经较好地被重构,充分说明该方法收敛速度较快,反演结果稳定。采用 $c_T^\delta(x) = c^\delta(x, T) = c(x, T) [1 + \delta \text{random}(x)]$ 计算测量误差,当测量误差 δ 分别为2%和5%时,污染源项的真值和反演结果的计算误差分别为3.04%和2.83%,比参考文献[21]的误差4.18%要小。

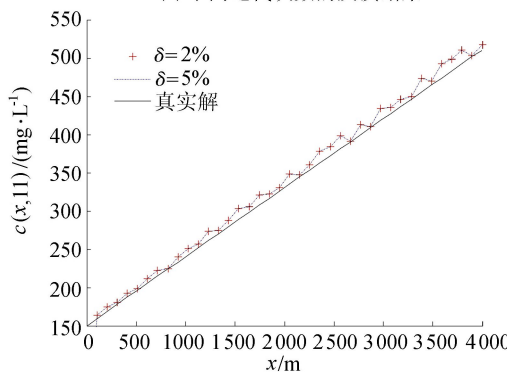
c. 试验3.为了进一步验证改进共轭梯度算法的有效性,将污染源项函数变化为一段函数(式(20)),空间距离增至为6000 m,其他模型参数与试验2相同。不同迭代次数 K 和不同测量误差 δ 的反演结果见图3。

$$q(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1000, 2000 \leq x < 3000, 4000 \leq x < 5000 \\ 85 & 1000 \leq x < 2000 \\ 121 & 3000 \leq x < 4000 \\ 153 & 5000 \leq x < 6000 \end{cases} \quad (20)$$

由于污染源项的不连续性,当迭代次数增大到100次时,污染源项才被较好地重构。类似地,考虑测量误差 δ 的影响时,尽管污染源项的不连续性,而

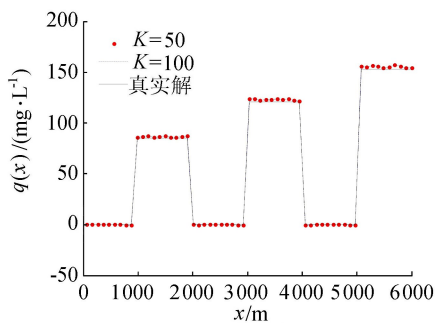


(a) 不同迭代次数的反演结果

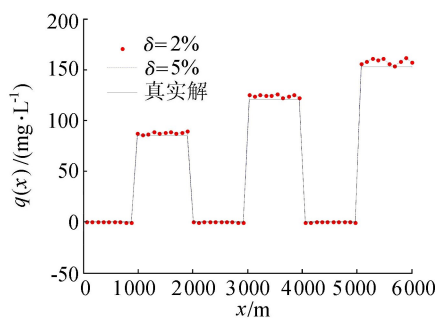


(b) 不同测量误差的反演结果

图2 实际问题的反演结果与附加数据的比较



(a) 不同迭代次数的反演结果



(b) 不同测量误差的反演结果

图3 试验3的反演结果

且测量误差也会产生影响,但是模拟结果也比较正常,充分证明改进共轭梯度算法的稳定性和较大的容错性。

5 结 语

采用有限差分法离散地下水控制方程,应用改进的共轭梯度算法重构地下水污染源项。数值模拟结果表明,对于性质友好的源项以及不连续不可导的源项均能够被反演。考虑测量误差的影响,结果显示在有测量误差的情况下也能得到稳定解,充分说明改进的共轭梯度算法是一种有效的反演方法。污染源项如果是连续的函数,迭代次数大约为 50 次,反演结果趋于稳定;污染源项如果是不连续的函数,迭代次数大约为 100 次时,反演结果趋于真实解,从而说明改进的共轭梯度算法是一种快速稳定的反演方法。

参考文献:

[1] ZHOU H Y, GOMEZ-HEMANDEZ J J, LI L P. Inverse methods in hydrogeology: evolution and recent trends [J]. *Advances in Water Resources*, 2014, 63: 22-37.

[2] 孙才志,陈相涛,陈雪皎,等. 地下水污染风险评估研究进展[J]. *水利水电科技进展*,2015,35(5):152-161. (SUN Caizhi, CHEN Xiangtao, CHEN Xuejiao, et al. Recent advances in groundwater contamination risk assessment[J]. *Advances in Science and Technology of Water Resources*,2015,35(5):152-161. (in Chinese))

[3] YEH W W G. Review: optimization methods for groundwater modeling and management [J]. *Hydrogeology Journal*, 2015, 23(6):1051-1065.

[4] 朱嵩. 基于贝叶斯推理的环境水力学反问题研究 [D]. 杭州: 浙江大学,2008.

[5] LI Zi, MAO Xiaokang,ZHOU Kang. Global multi-quadric collocation method for groundwater contaminant source identification [J]. *Environmental Modelling & Software*, 2011, 26(12):1611-1621.

[6] HAZART A, GIOVANNELLI J F, DUBOST S, et al. Inverse transport problem of estimating point-like source using a Bayesian parametric method with MCMC [J]. *Signal Processing*, 2014, 96:346-361.

[7] 王建平,程声通,贾海峰. 基于 MCMC 法的水质模型参数不确定性研究[J]. *环境科学*,2006, 27(1): 24-30. (WANG Jianping, CHENG Shengtong, JIA Haifeng. Markov chain monte carlo scheme for parameter uncertainty analysis in water quality model [J]. *Environmental Science*, 2006, 27 (1): 24-30. (in Chinese)).

[8] 李子,毛献忠,周康. 污染物非恒定输运逆过程反演

模型研究[J]. *水力发电学报*, 2013, 32(6): 115-121. (LI Zi, MAO Xianzhong, ZHOU Kang. Inversion model for the inverse process of unsteady pollutant transport [J]. *Journal of Hydroelectric Engineering*, 2013, 32 (6): 115-121. (in Chinese))

[9] ZENG Lingzao, SHI Liangsheng, ZHANG Dongxiao, et al. A sparse grid based Bayesian method for contaminant source identification [J]. *Advances in Water Resources*, 2012, 37: 1-9.

[10] WILLIAMS B, CHRISTENSEN W F, REESE C S. Pollution source direction identification: embedding dispersion models to solve an inverse problem [J]. *Environmetrics*, 2011, 22(8):962-974.

[11] WANG Hui, JIN Xin. Characterization of groundwater contaminant source using Bayesian method [J]. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 2012, 27(4): 867-876.

[12] OU Yang, WANG Xiaoyan. Identification of critical source areas for non-point source pollution in Miyun Reservoir watershed near Beijing, China [J]. *Water Science & Technology*, 2008, 58(11):2235-2241.

[13] 刘蕴,方晟,李红,等. 基于四维变分资料同化的核事故源项反演 [J]. *清华大学学报(自然科学版)*, 2015, 55(1): 98-104. (LIU Yun, FANG Sheng, LI Hong, et al. Source inversion in nuclear accidents based on 4D variational data assimilation [J]. *Journal of Tsinghua University (Science and Technology)*,2015,55(1): 98-104. (in Chinese))

[14] 轩晓博,逢勇,李一平,等. 金属矿区重金属迁移对水体影响的数值模拟[J]. *水资源保护*,2015, 31(2):30-35. (XUAN Xiaobo, PANG Yong, LI Yiping, et al. Numerical simulation of influence of heavy metal migration on water in metallic mining areas [J]. *Water Resources Protection*, 2015, 31(2):30-35. (in Chinese))

[15] DENG Zuicha, QIAN Kun, RAO Xiaobo, et. al. An inverse problem of identifying the source coefficient in a degenerate heat equation [J]. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2014, 23(3): 498-517.

[16] YANG Liu, DENG Zuicha, YU Jianning, et al. Optimization method for the inverse problem of reconstructing the source term in a parabolic equation [J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2009, 80(2): 314-326.

[17] FLETCHER R, REEVES C M. Function minimization by conjugate gradients [J]. *The Computer Journal*, 1964, 7(2): 149-154.

[18] 肖庭延,于慎根,王彦飞. 反问题的数值解法 [M]. 北京:科学出版社,2003:115-120.

(下转第 58 页)

- Scientiae Circumstantiae, 2011, 31 (9): 2066-2072. (in Chinese))
- [6] 鲁珍,李晔,马啸,等. 大冶湖 2000—2009 年地表水质评价及污染趋势预测[J]. 环境科学与技术,2012,35 (5):174-178. (LU Zhen,LI Ye,MA Xiao,et al. Surface water quality assessment in period 2000—2009 and forecasting on changing tendency of pollution in Daye Lake [J]. Environmental Science & Technology,2012,35(5): 174-178. (in Chinese))
- [7] GIRIJA T R,MAHANTA C,CHANDRAMOULI V. Water quality assessment of an untreated effluent impacted urban stream: the bharalu tributary of the Brahmaputra River, India [J]. Environmental Monitoring and Assessment, 2007,130(1/2/3):221-236.
- [8] 陈守煜,李亚伟. 基于模糊人工神经网络识别的水质评价模型[J]. 水科学进展,2005,16(1):88-91. (CHEN Shouyu,LI Yawei. Water quality evaluation based on fuzzy artificial neural network [J]. Advance in Water Science, 2005,16(1):88-91. (in Chinese))
- [9] 王淑芬. 应用统计学[M]. 北京:北京大学出版社, 2011.
- [10] 张旋,王启山,于森,等. 基于聚类分析和水质标识指数 的水质评价方法[J]. 环境工程学报,2010,4(2):476- 480. (ZHANG Xuan,WANG Qishan,YU Miao,et al. An approach for water quality assessment based on hierarchical cluster analysis and comprehensive water quality identification index [J]. Chinese Journal of Environmental Engineering, 2010, 4 (2): 476-480. (in Chinese))
- [11] 富天乙,邹志红,王晓静. 基于多元统计和水质标识指 数的辽阳太子河水质评价研究[J]. 环境科学学报, 2014,34(2):473-480. (FU Tianyi,ZOU Zhihong,WANG Xiaojing. Water quality assessment for Taizi River watershed in Liaoyang section based on multivariate statistical analysis and water quality identification index [J]. Acta Scientiae Circumstantiae, 2014, 34 (2): 473- 480. (in Chinese))
- [12] 袁连新,余勇. 聚类分析方法及其在环境监测(水质分 析)中的应用[J]. 环境科学与技术,2011,34(12H): 267-270. (YUAN Lianxin, YU Yong. Application of clustering analysis methods in environmental monitor (water analysis) [J]. Environmental Science & Technology,2011,34(12H):267-270. (in Chinese))
- [13] 补建伟,周爱国,周建伟,等. 不同系统聚类法在水化学 分类中的应用[J]. 工程勘察,2013(10):42-48. (BU Jianwei,ZHOU Aiguo,ZHOU Jianwei,et al. Application of different hierarchical clustering methods to hydrochemical classification[J]. Geotechnical Investigation & Surveying, 2013(10):42-48. (in Chinese))
- [14] SWANSON S K,BAHR J M,SCHWAR M T. Two-way cluster analysis of geochemical data to constrain spring source waters [J]. Chemical Geology, 2001, 179 (1-4): 73-91.
- [15] PANDA U C, SUNDARAY S K, RATH P, et al. Application of factor and cluster analysis for characterization of river and estuarine water systems-A case study: Mahanadi River (India) [J]. Journal of Hydrology,2006,331(3/4): 434-455.
- [16] 杨志恒. 基于 ward 法的区域空间聚类分析[J]. 中国人 口·资源和环境,2010,20(3):382-386. (YANG Zhiheng. Region spatial cluster algorithm based on ward method [J]. China Population, Resources and Environment,2010,20(3):382-386. (in Chinese))
- [17] 韩玉龙,刘振中. 雨水径流对受纳水体的污染特性研究 [J]. 水土保持研究,2015,22(6):65-71. (HAN Yulong, LIU Zhenzhong. Research on characteristics of the receiving water body polluted by rainwater runoff [J]. Research of Soil and Water Conservation,2015,22(6): 65-71. (in Chinese))
- [18] 荆红卫,华蕾,陈圆圆,等. 城市雨水管网降雨径流污染 特征及对受纳水体水质的影响[J]. 环境化学,2012,31 (2):208-215. (JING Hongwei, HUA Lei, CHEN Yuanyuan,et al. Pollution characteristics of runoff in urban storm sewer and its impaction to receiving water [J]. Environmental Chemistry, 2012, 31 (2): 208-215. (in Chinese))
- (收稿日期:2016-09-26 编辑:徐 娟)

+++++

- (上接第 46 页)
- [19] 姚胜伟. 几类共轭梯度算法的研究[D]. 上海:华东理 工大学,2014.
- [20] YAO Shengwei, LU Xiwen, NING Liangshuo, et al. A class of one parameter conjugate gradient methods [J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 265: 708- 722.
- [21] 范小平,李功胜. 确定地下水污染强度的一种改进的 遗传算法[J]. 计算物理,2007,24(2):187-191. (FAN Xiaoping, LI Gongsheng. An improved genetic algorithm for groundwater pollution [J]. Chinese Journal of Computational Physics, 2007, 24(2): 187-191. (in Chinese))
- (收稿日期:2016-06-08 编辑:王 芳)