

DOI:10.3880/j.issn.1004-6933.2023.03.004

基于 PINNs 的圣维南方程组数据同化方法

方卫华^{1,2}, 徐孟启^{1,3}

(1. 水利部南京水利水文自动化研究所, 江苏 南京 210012; 2. 水利部水旱灾害防御重点实验室, 江苏 南京 210029; 3. 河海大学计算机与信息学院, 江苏 南京 211100)

摘要:为提高河道水位流量数据同化的智能化水平,基于物理信息神经网络(PINNs)提出了圣维南方程组的数据同化方法。采用双输出网络结构解决双输出方程组的同化问题,以模拟的实测数据作为边界条件和初始条件,通过消融试验验证网络中加入时空映射缩放和平衡权重系数对同化模型的有效性,以及所提出同化方法在部分测值缺失情况下的鲁棒性。结果表明,一维非恒定流圣维南方程组的数据同化结果与 Preissmann 四点隐式差分法结果一致,且随着同化断面数量的增加,所获得的同化精度也稳步提升;基于 PINNs 的圣维南方程组数据同化方法有效,对非恒定流模拟具有较强的适应性。

关键词:圣维南方程组;物理信息神经网络;Preissmann 四点隐式差分法;数据同化

中图分类号:TV91 **文献标志码:**A **文章编号:**1004-6933(2023)03-0024-08

Data assimilation method of Saint-Venant equations based on PINNs//FANG Weihua^{1,2}, XU Mengqi^{1,3}(1. Nanjing Research Institute of Hydrology and Water Automation, Ministry of Water Resources, Nanjing 210012, China; 2. Key Laboratory of Flood and Drought Hazard Control, Ministry of Water Resources, Nanjing 210029, China; 3. College of Computer and Information, Hohai University, Nanjing 211100, China)

Abstract: In order to improve the intelligent level of river water level and flow data assimilation, a data assimilation method of Saint-Venant equations was proposed based on physics-informed neural networks (PINNs). The dual-output network structure was used to solve the assimilation problem of the dual-output equations and the simulated measured data were used as the boundary conditions and initial conditions. The ablation experiments were carried out to verify the effectiveness of the assimilation model by adding the spatio-temporal mapping scaling and the balance weight coefficient in the network, and the robustness of the proposed assimilation method in the absence of some measured values. The results show that the data assimilation results of the one-dimensional unsteady Saint-Venant equations are consistent with the results of the Preissmann four point implicit difference method, and the assimilation accuracy is also steadily improved with the increase of the number of assimilation sections. The data assimilation method of Saint-Venant equations based on PINNs is effective and has strong adaptability to unsteady flow simulation.

Key words: Saint-Venant equations; physics-informed neural networks; Preissmann four point implicit difference method; data assimilation

随着《“十四五”国家科技创新规划》和《“十四五”水利科技创新规划》相继发布,水利部对推进智慧水利和数字孪生建设进行了一系列的决策部署,人工智能技术已经成为水资源保护的重要组成部分。特别是随着嵌入式系统、端—边—云协同架构以及多源传感技术的发展,实现模型—实测数据的数据同化已成为提升水资源保护智能化水平的重要手段。

河流洪水预报预警是防洪减灾、水资源调度保护的重要内容,已有许多学者展开了相关研究。例如,刘志雨等^[1]研究了中小河流洪水预报预警问题;张珂等^[2]探究了洪水预报智能模型;朱跃龙等^[3]提出一种基于时空特征发掘的流量过程智能模拟方法;张轩等^[4]基于 BP 神经网络算法建立经验预报模型。以上文献达到了较好预测效果,然而现有智能模型对数据依赖性强,需要大量布设传感

基金项目:江苏省水利科技项目(2021073,2020024);应急管理部防汛抢险急需技术装备揭榜攻关项目(YJBA0821002)

作者简介:方卫华(1972—),男,教授级高级工程师,博士,主要从事数字孪生、智慧水利以及工程力学研究。E-mail:whfang@nsy.com.cn

器采集数据,且未与水力学相关物理方程等建立联系,物理含义不够明确。监测断面和测点数量的增加有利于数据驱动模型的建立,然而大量布设传感器需要较高的时间和经济成本。为有效精简测点数量,刘聚涛等^[5]使用聚类分析方法优化了流域内测点数,试验结果表明优化后监测点减幅达60%。可见,减少模型对测值数量的依赖是河道洪水预报预警的发展趋势,而在模型中引入水力学方程是减少对传感器数量依赖的一种重要方式。

圣维南方程组作为河道水文水资源计算和模拟的重要模型,在常规数值解法方面已经得到广泛而深入的研究。由于圣维南方程组的非线性特征,很难求得其解析解,只能采用数值解法,主要包括特征线法、直接差分法、有限元法、有限体积法等。蒋晶晶^[6]采用有限体积法对明渠非恒定流圣维南方程组进行了求解;王浩骅等^[7]研究了圣维南方程组差分法数值算法效率与断面数量的关系;胡庆云等^[8]研究了圣维南方程组四点隐式差分解;付典龙等^[9]使用特征线方法基于圣维南方程组计算了锦江水位。由于数值解法需要划分网格存储相关离散变量,一旦计算区域或条件变动就需要重新计算,并且计算精度取决于划分网格的密度,网格划分越细精度越高。上述数值方法对研究人员的经验要求较高,且在计算分析中难以与现有主流的硬软件兼容。由于仪器成本比较高、安装调试困难以及仪器设备本身的稳定性问题,采用监测仪器完整获取整个河道全时空流速和水位数据不仅成本高昂,而且资料的连续性也很难保证。而对于运行条件比较好的部位安装监测仪器获取少量监测数据,采用数据同化的方法获得任意断面的水文水资源数据,不仅有效节约了成本,而且提高了效率。

神经网络作为一种典型的人工智能方法不仅在回归分析、聚类分析和特征提取中有广泛应用,而且在偏微分方程求解方面也成为当前的研究热点。Raissi等^[10]分别就偏微分方程的正反问题建立了物理信息神经网络(physics-informed neural networks, PINNs)模型,提出了基于PINNs约束的偏微分方程解法框架;Sirignano等^[11]指出网格划分在解决高维偏微分问题时不可行,通过将物理定律编入损失函数以提高神经网络逼近能力,从而结合伽辽金方法提出了深度伽辽金方法;Lu等^[12]基于残差自适应方法提高PINNs的训练效率,并提供了一个PINNs解决偏微分问题的算法库DeepXDE;Yang等^[13]提出了一种贝叶斯物理信息神经网络B-PINNs;Kharazmi等^[14]提出了变分物理信息神经网络hp-VPINNs;王昀卓^[15]提出了多网策略的PINNs以提

高求解效率;李野等^[16]综述了PINNs最新进展;Mao等^[17]利用PINNs求解Navier-Stokes方程组;尧少波等^[18]使用PINNs方法预测流体瞬时物理量;Wang等^[19]使用PINNs思想找到了一个平滑的自相似解。上述探索为PINNs的进一步深入研究奠定了基础,但在结合具体工程应用背景、偏微分方程组求解以及数据同化方面的研究依然欠缺。利用神经网络的自动求导功能获取偏微分,从而构建满足物理约束的优化问题可以有效缩小解空间,再加入定解条件可以逼近方程的解,在此过程中通过增加实测数据作为约束信息可以不断提高求解精度和速度。相对于传统变分同化或最优控制同化方法而言,神经网络解法能找到一组同时符合方程约束、定解条件约束以及实测数据的参数,部分数据缺失对整体效果影响小,可以好地避免累积误差,且随着实测断面的不断增加,同化精度也会不断提高。

鉴于此,本文采用双输出神经网络结构解决双方程组的数据同化问题,构建基于PINNs的河道水流运动的数据同化方法,通过与四点隐式差分法计算得到的河道水位、流量等要素对比,验证方法的正确性。

1 基于PINNs数据同化原理

基于PINNs的数据同化方法主干网络可由多层感知机神经网络构成,但在计算损失时与传统多层感知机使用标签值计算不同,是通过嵌入物理信息实现损失值计算。通用的多层感知机神经网络以 η 表示神经网络的输入,以 $\hat{u}$ 表示对应输出。神经网络的节点参数的集合用参数 θ 表示,则训练网络的目的就是要通过确定参数 θ 从而得到函数 $\hat{u}_\theta$ 。对于有 N 个样本的训练集 $\{(\eta_i, y_i) \mid i = 1, 2, \dots, N\}$,其中 η_i 表示第 i 个样本, y_i 表示 η_i 对应的标签。期望 $\hat{u}_\theta(\eta_i)$ 逼近 y_i 可转化为求解如下的优化问题:

$$\theta = \operatorname{argmin} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\| \hat{u}_\theta(\eta_i) - y_i \right\|^2 \quad (1)$$

式中: $\hat{u}_\theta(\eta_i)$ 为输入 η_i 通过神经网络对应的输出。通过反向传播优化算法可找到一组神经网络参数 θ 使得预测值 $\hat{y}$ 逼近理论值 y 。

当训练集中没有与 η_i 一一对应的 y_i 时,就无法通过监督学习计算损失函数,从而无法根据反向优化方式更新网络参数。PINNs与上述通用神经网络不同,其根据物理信息计算损失函数。PINNs先正向传播计算预测值与预测值的导数,组合出满足物理约束的损失,从而得到损失函数值,不断优化神经网络参数 θ ,当损失函数值足够小时可以认为在定义域内满足该物理微分条件。然而仅有物理规则只能缩小解空间,得到满足微分或偏微分方程的通解,

却无法解出精确的数值解,为此需要增加有标签的定解条件作为约束。在约束时,可以将实测数据作为定解条件,以边界条件和初始条件形式提供约束,并通过增加监测断面不断提高求解精度,从而实现数据同化。基于 PINNs 的数据同化原理中, $\hat{u}$ 表示神经网络预测 $\hat{u}(t, x)$, $N(\lambda, \hat{u}, \hat{u}_t, \hat{u}_x)$ 表示非线性组合算子,将 $F(t, x)$ 定义为由同化输出及其微分与方程系数的组合,这种组合取决于方程的实际物理意义,如对于一维 Burgers 方程可取 $N(\lambda, \hat{u}, \hat{u}_t, \hat{u}_x) = \lambda_1 \hat{u} \hat{u}_x + \lambda_2 \hat{u}_{xx}$, 式中 $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, 表示固定的系数。 $u_{t=0}$ 、 $u_{x=0}$ 分别指方程在初始时刻对应的初始条件 $u(t=0, x)$ 与边界条件 $u(t, x=0)$, 在数据同化过程中这些初始条件和边界条件由断面实测数据获取,如无特别说明统一称为定解约束条件。 $\{t_b, x_b, u_b \mid b = 1, 2, \dots, G\}$ 表示初始时刻和边界处的训练数据, $\{t_f, x_f \mid f = 1, 2, \dots, K\}$ 表示定义域内抽样得到的训练数据, G 表示初始时刻和边界处抽样点数量, K 表示定义域内抽样点的数量。损失函数值由均方误差 (mean squared error, MSE) 计算得到; L_u 表示边界处与初始条件对损失函数的约束,通过初始值和边界点预测值与标签的 MSE 得到; L_f 表示定义域内无标签的抽样点物理信息偏微分条件约束,由定义的偏微分函数得到。损失函数反向传播直至神经网络收敛,拟合的物理系统可视为满足以上所有条件。

2 圣维南方程组同化方法

2.1 同化模型

神经网络方法作为通用函数逼近器可在约束下的定义域内避开网格剖分,从而使得同化求解过程自然满足对称性、能量守恒等物理规则,将仪器测值作为定解条件的同化方法物理意义上更加完善。因此,将监测仪器实测数据作为同化样本点,基于 PINNs 的圣维南方程组数据同化相比常规同化方法具有更多的优势。

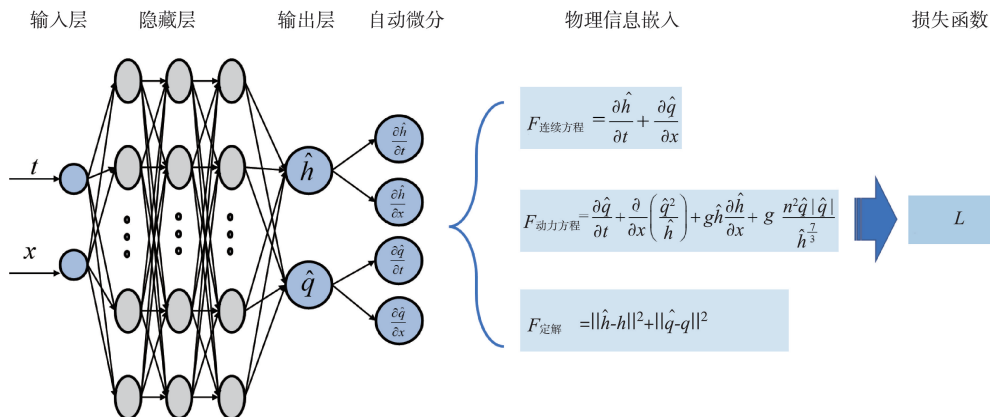


图1 PINNs 方法求解圣维南方程组网络结构

Fig. 1 The structure of PINNs method for solving Saint-Venant equations

为检验本文方法的有效性,选取一长为 20 km、断面为规则矩形的河道进行检验。相关参数为:河道糙率 n 为 0.025,初始时刻全河道水深均为 4 m,初始流量为 0,断面间距 100 m。边界条件为:上游水深在 24 h 内由 4 m 线性增加到 6 m,下游水深恒定为 4 m,无旁侧入流。相应的一维单宽矩形断面河道简化圣维南方程组为

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} \right) + gh \frac{\partial h}{\partial x} + g \frac{n^2 q |q|}{h^{7/3}} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

式中: t 为时间; x 为距起始点距离; h 为水深; q 为单宽流量; g 为重力加速度。其中,自变量为 x 和 t ,因变量为 h 和 q 。

2.2 网络结构

由于圣维南方程组为双输出方程组,因此必须采用双输出网络结构,其中隐藏层中需要更多神经元进行非线性映射。考虑到神经网络层数越多训练越困难,深度增加会造成梯度消失问题,同时带来计算负担。为尽可能减小计算量,降低计算复杂度、提高收敛效率,通过减少网络深度、增加网络宽度方法构造相应的同化模型。使用 3 隐藏层、每层 200 个神经元的全连接结构构造神经网络。神经网络中激活函数使用 tanh,优化器使用 Adam,学习率设为 0.001,同时为提高模型鲁棒性加入参数为 0.0001 的正则化约束。

基于 PINNs 的圣维南方程组数据同化网络结构如图 1 所示,构造双输出结构物理信息神经网络,将神经网络的两个输出分别视为水深与单宽流量的预测值,通过神经网络模型自动求导功能计算因变量对自变量的偏微分,进一步通过神经网络预测值及计算得到的偏微分构造约束方程嵌入物理信息。连续方程约束、动力方程约束及定解条件约束共同作用获得损失函数,端到端地训练神经网络参数使模

型收敛,训练中使用梯度下降算法使得损失函数不断减小。

图1中, $\hat{h}$ 、 $\hat{q}$ 分别为神经网络预测的水深和单宽流量, $\frac{\partial \hat{h}}{\partial t}$ 、 $\frac{\partial \hat{h}}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial \hat{q}}{\partial t}$ 、 $\frac{\partial \hat{q}}{\partial x}$ 为由自动求导获得的对应偏导项。将初始与边界处抽样的 G 个输入点 (t_b, x_b) 及对应的 h 、 q 用于训练定解约束, $\|\hat{h} - h\|^2 + \|\hat{q} - q\|^2$ 表示神经网络预测值与理论值的差距。在定义域内由拉丁超立方体抽样得到的 K 个点, (t_f, x_f) 表示第 f 个输入点, K 个无标签输入点作为用于连续方程与动力方程约束。需要注意的是对进行边界约束的抽样点同样训练了方程约束项。最终可以得到损失函数的整体表达式:

$$L = \lambda \left(\frac{\partial \hat{h}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} \right)_{b+f}^2 + \left[\frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + \frac{\partial (\hat{q}^2)}{\partial x(h)} + g \hat{h} \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} + g \frac{n^2 \hat{q} | \hat{q} |}{\hat{h}^{\frac{7}{3}}} \right]_{b+f}^2 + (\hat{h} - h)_b^2 + (\hat{q} - q)_b^2 \quad (3)$$

式中: b 与 f 为作用范围; λ 为权重系数, 试验中取 10^{10} 。变量上方三角标表示预测值, 根据损失函数反向传播更新, 当损失函数足够小时认为满足了定解约束与物理方程约束。

2.3 试验环境及参数

试验采用的 Pytorch 版本为 1.11、python 版本为 3.8, 在 NVIDIA RTX 3060 GPU 上进行。同化检验设定在初始时刻与边界上共有 1931 个实测数据作为定解条件, 其中最上游断面与最下游断面的测值作为边界条件, 0 时刻所有断面测值作为初始条件。在 0~24 h 所有断面随机抽样坐标点训练模型物理约束能力, 需要注意的是在整个定义域内的抽样与边界抽样的点不同, 并没有获得标签值, 仅作为一个坐标输入训练网络。张婷等^[20]综述了国内外水文、水动力、水质模型联合应用进展, 叙述了全过程模拟对水资源开发利用与综合决策的重要意义, 同时对耦合过程中存在的时空尺度匹配问题进行了简要分析。工程应用中, 天然河道水流运动在时间和空间上跨度大, 已有文献工作未考虑量纲差异而导致的数量级差距问题, 直接使用神经网络同化将会导致计算不收敛。本文将 20 km 河道 24 h 水流运动研究转化为单位量纲时间跨度为 86 400 s、空间跨度为 20 km, 避免由于因变量变化尺度远小于自变量变化尺度而导致模型不收敛。神经网络作为通用函数逼近器理论上可以通过调整内部参数进行自适应, 然而这种自适应调整需要增加神经网络层数, 会带来参数量增加、收敛困难等问题。虽然理论上深层网络可行, 但实践中发现受计算能力、训练时间等限制, 会出现模型不收敛、实际效果很差等情况。为解

决河道水流模拟尺度差异问题, 提出在神经网络输入层加入尺度变换, 将输入映射到一个更密集的区域以加速神经网络收敛, 具体措施为在神经网络输入层将输入的自变量进行缩放。

$$k = \frac{\min(x_{j_{\max}} - x_{j_{\min}})}{\min(y_{i_{\max}} - y_{i_{\min}})} \quad (4)$$

式中: y_i 、 x_j 分别为不同的因变量与自变量; k 为缩放倍数, 为自变量中最小变化量与因变量中最小变化量的比值。

由于神经网络具有一定的自适应能力, k 的取值可以在不超出神经网络调节能力的范围内结合式(4)自由选取。输入层的尺度缩放变化使得浅层神经网络可以适应输入输出尺度差异大的问题, 此外浅层神经网络的使用有效减少了神经网络参数量, 提高了收敛速度, 实现了算法的轻量化。本文 k 值取 10^4 。

这种尺度缩放密集映射并没有改变偏导项数值, 偏导实质是输出变化量与输入变化量的比值, 河道水流的输入尺度变化大、输出变化尺度小导致偏导项数值小, 由两偏导差值组成的连续方程数值更小, 导致连续方程约束在损失函数中会因数值远小于其他约束项而失效, 为解决圣维南方程组中连续方程失效问题, 提出加入权重系数 10^{10} 平衡损失函数中不同方程约束能力, 以平衡定解条件损失、连续方程损失和动力方程损失在损失函数反向传播时贡献度。权重系数的取值由初始化后第一次计算的定解损失与方程损失数量级分析得出。

加入尺度变换与权重系数两个措施使得基于物理信息神经网络的数据同化方法可以应用到实际尺度差异大的河道非恒定流模拟中。

3 验证结果与分析

3.1 对比检验

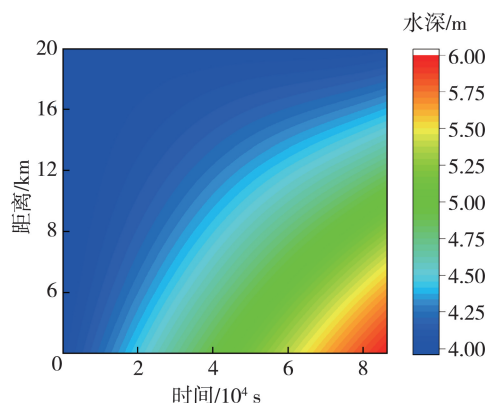
Preissmann 四点隐式差分法具有结构简单精度较高等优点^[21], 广泛用于河道非恒定流计算。为检验本文同化方法的有效性, 将 Preissmann 四点隐式差分法求解圣维南方程组的结果作为同化结果的参考基准。基准数据生成利用 MATLAB R2016b 实现, 采用设定值模拟仪器测值作为同化定解条件, 以各个断面不同时刻水深与单宽流量的值与神经网络同化结果对比验证模型效果。其中, 时间间隔为 100 s, 共得到 865 个时间节点; 以 100 m 为间距划分断面, 共获得 201 个断面, 获得差分法水深 h (865×201 个数据) 和单宽流量 q (865×201 个数据) 作为基准值。

同化结果与隐式差分法基准结果计算差异采用

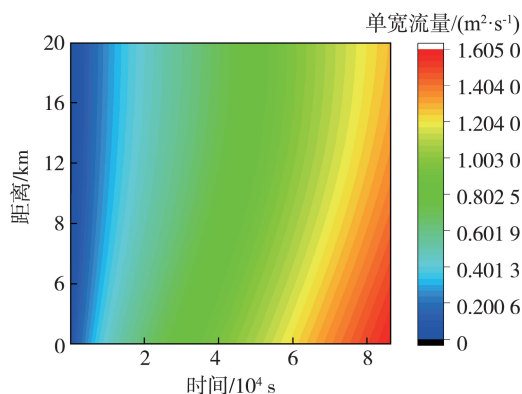
平均绝对误差 $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\hat{y}(t_i, x_i) - y(t_i, x_i)|$ 来衡量。

其中, N 表示均匀采样的验证点数, 为隐式差分法生成的解的个数 865×201 , (t_i, x_i) 表示均匀抽样得到的第 i 个用于验证的点, $\hat{y}(t_i, x_i)$ 表示在点 (t_i, x_i) 处神经网络的拟合值, $y(t_i, x_i)$ 表示 (t_i, x_i) 处的基准值。

边界条件与初始条件共采样 1 931 个点, 定义域使用拉丁超立方体随机采样 10 000 个点用以训练同化模型, 经过 10 000 批次约 3 min 神经网络收敛。随后与隐式差分法获取的基准值计算平均绝对误差, 并对两种方法结果进行可视化分析。计算结果显示, 使用定解条件的 PINNs 数据同化方法水深平均绝对误差为 0.031 m, 单宽流量平均绝对误差为 $0.005 \text{ m}^2/\text{s}$ 。图 2、图 3 分别为隐式差分法和 PINNs 法同化效果, 上游断面水位上升导致下一时刻下游断面水位上升流量增大, 水位与流量在时空上变化有一定时延而非实时同步变化, 结果符合预期效果。可见, 基于 PINNs 的同化方法与隐式差分法得出数值拟合结果吻合。为更细致分析隐式差分法与 PINNs 法的差异, 对数据进行切片观察, 结果如图 4 和图 5 所示, 分别从固定时间、断面两个维度对拟合



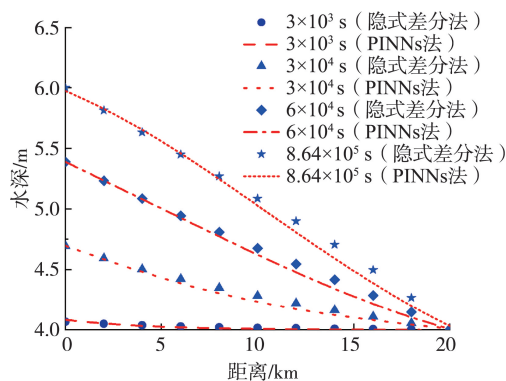
(a) 水深



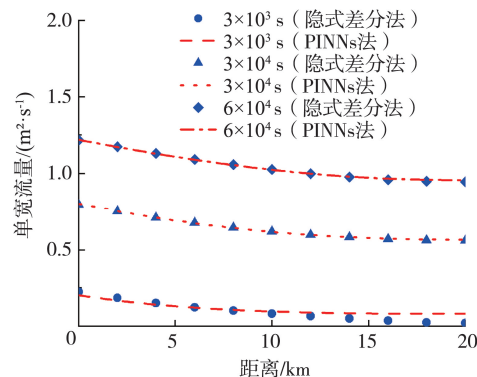
(b) 单宽流量

图 3 PINNs 法同化效果

Fig. 3 Assimilation effect of PINNs



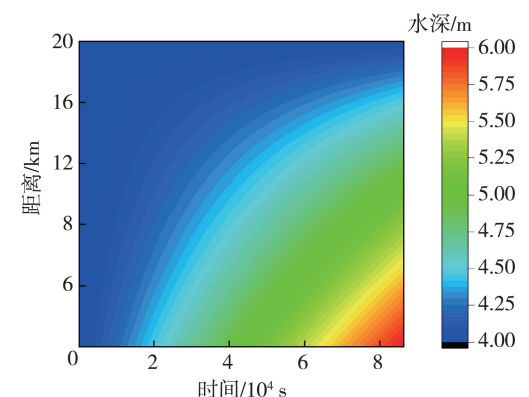
(a) 水深



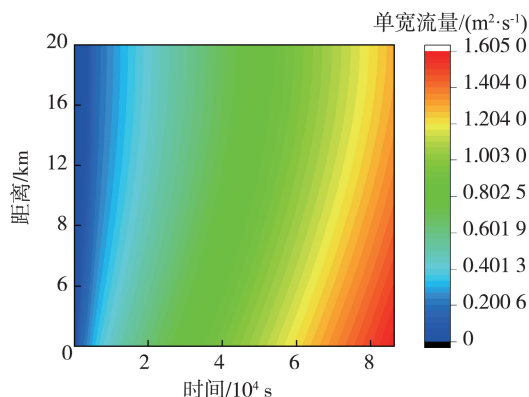
(b) 单宽流量

图 4 不同时刻同化效果切片对比

Fig. 4 Comparison of assimilation effect slices at different times



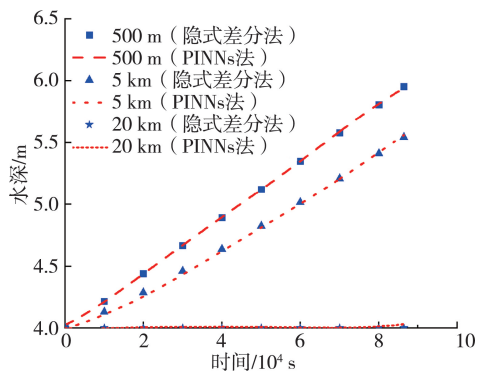
(a) 水深



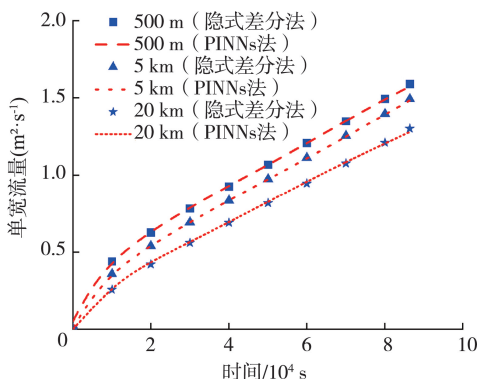
(b) 单宽流量

图 2 隐式差分法效果

Fig. 2 Effect of implicit difference method



(a) 水深



(b) 单宽流量

图5 不同断面同化效果切片对比

Fig. 5 Comparison of assimilation effect slices at different cross sections

效果微观观察,结果显示 PINNs 法拟合效果良好,基于 PINNs 的圣维南方程组数据同化方法能适应河道非恒定流模拟。

3.2 增加样本对同化效果分析

为检验数据同化程度的效果,在原同化模型的基础上分别增加 1 个新断面(方案 1)与 2 个新断面(方案 2)实测数据扩充定解条件,以加深数据同化程度。在方案 1 的同化试验中,除原有初始条件边界条件外,加入距离起始断面 10 km 的断面实测数据作为补充。加深同化程度在初始时刻与边界处共有 $(1\ 931 + 865)$ 个有标签的点,其中有少数点统计了 2 次,这些点位于关键位置无须滤除。为保持与原同化试验一致,在 $(1\ 931 + 865)$ 个有标签点中随机抽样 1931 个输入点作为定解条件,其余试验环境均不变;试验结果表明,增加 1 个断面水深平均绝对误差由 0.031 下降至 0.015;单宽流量平均绝对误差由 0.005 下降至 0.0045。在方案 2 的同化试验中,加入距离起始断面 5 km 和 10 km 的 2 个断面实测数据作为补充。加深同化程度在初始时刻与边界处共有 $(1\ 931 + 865 + 865)$ 个有标签的点,同样随机选取 1931 个点作为输入,其余试验环境均不变;试验结果表明,新增 2 个断面的水深平均绝对误差

由方案 1 的 0.015 再下降至 0.011,单宽流量平均绝对误差由方案 1 的 0.0045 再下降至 0.004。试验结果显示随着同化程度不断加深,模型的精度也在稳步提升。

图 6 为 15 km 断面不同方法同化效果对比,可以看出, PINNs 法的方案 1 和方案 2 更接近差分法结果,拟合效果更好。但增加河道采样断面需要布置更多传感器,在实际应用中需要综合考虑精度与成本。加深同化程度的试验结果符合数据同化的一般规律,通过以上试验可以发现 PINNs 法可不断结合新实测数据,加深同化程度以提升模型精度。

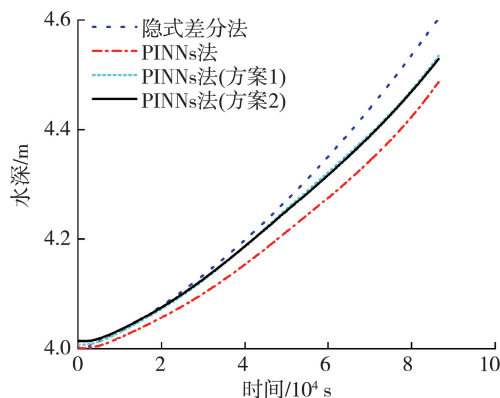


图6 15 km 断面不同方法同化效果对比

Fig. 6 Comparison of assimilation effects of different methods on 15 km section

4 消融试验结果与分析

进行消融试验的目的为:①验证时空映射、尺度缩放对神经网络的作用,分别对网络输入是否进行缩放、缩放不同倍数进行试验,通过评价指标平均绝对误差验证所提出措施的有效性;②在方程组中加入权重平衡各项约束对同化模型的作用,在进行缩放的网络中分别对加入平衡权重与不加入平衡权重进行试验,观察与隐式差分法获得的基准数据的平均绝对误差;③确定同化方法对边界条件与初始条件选取的依赖性,目的是验证模型对定解条件的鲁棒性,同样通过与基准数据计算得到的平均绝对误差体现模型效果,误差越小说明模型性能越高;④验证模型在不同来水条件的泛化性能,证明基于 PINNs 的数据同化方法在矩形河道水流模拟中的适应性。

4.1 尺度缩放消融验证

圣维南方程组描述河道水流运动具有输入尺度大、输出尺度小问题,针对这个现象造成的浅层神经网络不收敛问题,提出了进行时空映射,在网络中加入尺度缩放机制,通过将输入线性缩放 k 倍,将输入、输出尺度差异调整至神经网络自适应调节范围

内。如表 1 所示,对尺度缩放倍数进行消融试验,结果表明, k 为 1 时(不进行缩放)效果差,加入尺度变化机制可以有效提高精度; k 在 $10^3 \sim 10^6$ 倍时效果较好,验证了神经网络具有一定的自适应能力; $k > 10^7$ 时反而会导致精度下降,说明过大的缩放倍数同样超出了神经网络调节能力。可见,引入的尺度变化机制增强了神经网络对输入、输出尺度差异大的适应能力。算例中通过计算分析选取的尺度缩放倍数 10^4 落在神经网络调节范围区间内,说明时空映射尺度变换能有效缓解尺度差异问题。

表 1 不同尺度缩放率对结果的影响

Table 1 Effects of different scaling rates on results

k	水深平均绝对误差	单宽流量平均绝对误差
1	2.154	0.533
10^2	0.108	0.017
5×10^2	0.071	0.023
10^3	0.054	0.009
5×10^3	0.038	0.008
10^4	0.031	0.005
10^5	0.036	0.007
10^6	0.038	0.019
10^7	0.109	0.032
10^8	0.359	0.322

4.2 权重机制消融验证

河道水流属于不可压缩流体,分析发现仅由两偏导差值组成的连续方程,在损失函数中会因数值远小于其他约束项而失效,因此为描述质量守恒的连续方程施加高权重。神经网络初始化后首次计算得到的定解损失数量级为 10^0 ,连续方程损失数量级为 10^{-11} ,动力方程损失数量级为 10^{-6} ,通过数量级差异估计平衡权重系数范围。若直接通过数量级差异计算则权重系数为 10^{11} ,但考虑到定解损失是来自实测数据的强约束,实际取权重系数为 10^{10} 效果更好。

对网络调整方程权重进行消融试验,不进行权重调整的模型经过 10 000 次迭代后水深平均绝对误差为 0.107,单宽流量平均绝对误差为 0.017;连续方程约束加入权重 10^{10} 后的水深与单宽流量平均绝对误差分别为 0.031 和 0.005;连续方程加入权重 10^{10} 的同时在动力方程加入权重 10^5 后效果反而较不加权重更差。分析认为连续方程加入权重有利于体现水流为不可压缩流体。虽然从圣维南方程组结构分析,动力方程也应该加入平衡系数,但在试验中连续方程与动力方程都加入参数拟合效果反而变差,分析认为连续方程中每项数值都比较小且均衡,连续方程约束仅由两项偏导项构成,而动力方程约束由导数项、常数项与神经网络预测输出项等多项组成,加入高权重反而会影神经网络中参数反向

传播。以上试验证明了权重机制对网络模型的影响,神经网络通过反向传播算法,不断拟合逼近目标,引入权重平衡机制有利于提高模型精度。

4.3 定解条件选取消融验证

观察定解条件选取对最终结果的影响,即考虑实测值缺失对模型的影响。改变定解条件,其余部分一致按照加入时空缩放、加入平衡权重的同化方法进行设计。基于 PINNs 的同化模型中由实测数据作为定解条件,对实测数据部分缺失的情况进行模拟,即检测对部分定解条件测值缺失时模型的适应能力。试验结果表明,定解条件为最上游断面与最下游断面及初始时刻水深时,水深与单宽流量平均相对误差分别为 0.031 和 0.005;定解条件取最上游断面与最下游断面时,水深与单宽流量平均相对误差分别为 0.072 和 0.012;仅取最上游断面数据作为定解条件时,水深和单宽流量平均绝对误差分别为 0.316 和 0.050。可见,随着实测数据的缺失,模型的精度在不断下降,拥有两个断面作为定解条件模型优于仅有一个断面实测数据作为定解条件得到的模型。试验结果表明基于 PINNs 的数据同化方法对定解条件选取具有一定的鲁棒性,在实测数据部分缺失的情况下依然能训练模型,只是精度会有所下降。

4.4 不同来水条件下模型泛化能力

以上试验均是在线性来水条件下进行,为验证模型的泛化能力,改变上游来水条件进行试验。在实际场景中,上游来水导致水位上升并非严格的线性关系,为了拟合最上游水位变化情况,考虑线性函数、三角函数、指数函数、二次函数关系的水位上升关系。线性函数来水显示最上游断面在 0 ~ 24 h 内水位呈线性增长趋势;三角函数来水显示最上游断面水深在 0 ~ 12 h 线性增长,12 ~ 24 h 线性减小;指数函数来水显示在 0 ~ 24 h 最上游断面水深呈指数增长趋势;二次函数来水显示上游断面水深在 0 ~ 12 h 呈二次函数关系增长,12 ~ 24 h 呈二次函数关系减小。由试验结果可见,线性函数来水时水深与单宽流量平均绝对误差分别为 0.031 和 0.005;三角函数来水时分别为 0.014 和 0.014;指数函数来水时水分别为 0.027 和 0.005;二次函数来水时分别为 0.01 和 0.013。模拟的不同来水情况及试验结果表明,提出的同化模型计算结果与差分法计算结果差别均不大,说明基于 PINNs 的圣维南方程组数据同化方法在河道水流模拟中具有一定的泛化能力。

综上,同传统方法相比,基于 PINNs 的圣维南方程组数据同化方法的优势是具有数据同化功能、方

便与各种智能算法融合和易于封装到嵌入式系统,且具有较高的鲁棒性和泛化能力。在计算时长方面,该方法所消耗时间约 3 min,传统 Preissmann 四点隐式差分方法约 5s,为此下一步将针对计算复杂问题进行优化研究,以尽量降低计算所消耗的时间。

5 结 语

全河道流速水位监测需要部署大量传感器,而基于 PINNs 的圣维南方程组数据同化方法仅需在少量断面部署传感器收集数据,仅使用最上游断面、最下游断面数据及初始时刻河道流速、水位数据作为同化条件便可构建同化模型。利用同化模型可计算出全河段全时间过程水位流量数据,实现了采样断面由多到少的演变。在模型建立过程中发现,通过时空映射缩放、加入方程权重等方法调整神经网络,有效解决了河道水流模拟输入、输出尺度差异问题;通过增加采样断面和测点数能够稳步提升同化结果的精度,此外即便初始条件和边界条件中缺乏部分数据模型仍能使用,尽管精确度有所降低,但基于 PINNs 的同化方法依然可行,从而证实本方法对仪器测值缺失具有一定的鲁棒性。本文算例只对矩形断面河道进行了研究,下一步将结合真实河道几何特征、物理约束和边界条件,构建适合自然河流水动力特征的基于 PINNs 多种维度的水动力模型的数据同化方法,解决复式断面、动床、分叉蜿蜒等各种河道和往复流等复杂流态条件下的水文水资源信息智能插值、数据增强和时空预测问题。

参考文献:

[1] 刘志雨,刘玉环,孔祥意. 中小河流洪水预报预警问题与对策及关键技术应用[J]. 河海大学学报(自然科学版),2021,49(1):1-6. (LIU Zhiyu, LIU Yuhuan, KONG Xiangyi. Problems, strategies and key technology research of flood forecasting and early warning for small and medium-sized rivers [J]. Journal of Hohai University (Natural Sciences), 2021, 49(1):1-6. (in Chinese))

[2] 张珂,牛杰帆,李曦,等. 洪水预报智能模型在中国半干旱半湿润区的应用对比[J]. 水资源保护,2021,37(1):28-35. (ZHANG Ke, NIU Jiefan, LI Xi, et al. Comparison of artificial intelligence flood forecasting models in China's semi-arid and semi-humid regions[J]. Water Resources Protection, 2021, 37(1):28-35. (in Chinese))

[3] 朱跃龙,赵群,余宇峰,等. 基于时空特征挖掘的流量过程智能模拟方法[J]. 河海大学学报(自然科学版),2021,49(1):7-12. (ZHU Yuelong, ZHAO Qun, YU

Yufeng, et al. Intelligent simulation method of runoff process based on spatiotemporal feature mining [J]. Journal of Hohai University (Natural Sciences), 2021, 49(1):7-12. (in Chinese))

[4] 张轩,张行南,江唯佳,等. 秦淮河流域东山水位预报研究[J]. 水资源保护,2020,36(2):41-46. (ZHANG Xuan, ZHANG Xingnan, JIANG Weijia, et al. Study on water level forecast of Dongshan Station in Qinhuai River Basin[J]. Water Resources Protection, 2020, 36(2):41-46. (in Chinese))

[5] 刘聚涛,温春云,韩柳,等. 抚河流域综合治理监测布局优化[J]. 水利水电科技进展,2021,41(6):65-71. (LIU Jutao, WEN Chunyun, HAN Liu, et al. Layout optimization of comprehensive management monitoring in Fuhe River basin[J]. Advances in Science and Technology of Water Resources, 2021, 41(6):65-71. (in Chinese))

[6] 蒋晶晶. 糙率变化对圣维南方程组数值解的影响[D]. 郑州:郑州大学,2010.

[7] 王浩骅,管光华,肖昌诚. 一维圣维南方程差分数值算法中稀疏矩阵求解方法比较及优选研究[J]. 灌溉排水学报,2021,40(3):116-124. (WANG Haohua, GUAN Guanghua, XIAO Changcheng. Comparison and optimization of sparse matrix solution methods in one-dimensional Saint-Venant equation difference numerical algorithm[J]. Journal of Irrigation and Drainage, 2021, 40(3):116-124. (in Chinese))

[8] 胡庆云,王船海. 圣维南方程组 4 点线性隐格式的稳定性的分析[J]. 河海大学学报(自然科学版),2011,39(4):397-401. (HU Qingyun, WANG Chuanhai. Stability analysis of 4-point linear implicit schemes for Saint-Venant equations [J]. Journal of Hohai University (Natural Sciences), 2011, 39(4):397-401. (in Chinese))

[9] 付典龙,傅春. 一维圣维南方程组的特征线法[J]. 南昌大学学报(工科版),2006,(4):386-389. (FU Dianlong, FU Chun. The eigenfunction method of one-dimensional Saint-Venant equations [J]. Journal of Nanchang University (Engineering & Technology), 2006, (4):386-389. (in Chinese))

[10] RAISSI M, PERDIKARIS P, KARNIADAKIS G E. Physics-informed neural networks: a deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations [J]. Journal of Computational Physics, 2019, 378:686-707.

[11] SIRIGNANO J, SPILIOPOULULOS K. DGM: a deep learning algorithm for solving partial differential equations[J]. Journal of Computational Physics, 2018, 375:1339-1364.

[12] LU Lu, MENG Xuhui, MAO Zhiping, et al. DeepXDE: a deep learning library for solving differential equations[J]. SIAM Review, 2021, 63(1):208-228.

(下转第 64 页)

林业科技大学,2014.

- [27] 白超海. 湖南省干旱成因分析及对策研究[J]. 中国防汛抗旱, 2010, 20(6): 20-22, 31. (BAI Chaozhai. Cause analysis and countermeasures of drought in Hunan Province[J]. China Flood & Drought Management, 2010, 20(6): 20-22, 31. (in Chinese))
- [28] 尹建军, 杨奇勇, 尹辉. 湖南省农业旱灾灾情评估与分析[J]. 云南地理环境研究, 2008(1): 37-40. (YIN Jianjun, YANG Qiyong, YIN Hui. Assess and analysis on agriculture drought in Hunan [J]. Yunnan Geographic Environment Research, 2008(1): 37-40. (in Chinese))
- [29] 黎祖贤, 周盛, 樊志超, 等. 湖南特大干旱时空变化特征分析[J]. 干旱气象, 2018, 36(4): 578-582. (LI Zuxian, ZHOU Sheng, FAN Zhichao, et al. Analysis of temporal and spatial variation of extreme drought in Hunan Province [J]. Journal of Arid Meteorology, 2018, 36(4): 578-582. (in Chinese))
- [30] 符静, 旷微, 邓运员, 等. 湖南省近 56 年降水变化趋势及空间特征[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2021, 43(2): 110-119. (FU Jing, KUANG Wei, DENG Yunyuan, et al. Trends of precipitation variations and their

spatial patterns in Hunan Province over 56 years (1960-2015) [J]. Journal of Southwest University (Natural Science Edition), 2021, 43(2): 110-119. (in Chinese))

- [31] 罗玉琳. 基于遥感土壤水分和遥感降水的湘江流域干旱监测研究[D]. 南京: 东南大学, 2020.
- [32] 胡国华, 李滔, 盛丰, 等. 基于降水量距平百分率的湘江流域干旱时空特征研究[J]. 长沙理工大学学报(自然科学版), 2020, 17(1): 74-82. (HU Guohua, LI Tao, SHENG Feng, et al. Characteristics and adaptation of drought in Xiangjiang River based on the percentage of precipitation anomalies [J]. Journal of Changsha University of Science & Technology (Natural Science), 2020, 17(1): 74-82. (in Chinese))
- [33] 李永亮, 林辉, 马延辉. 基于 MODIS 数据的湖南省旱情监测研究[J]. 水土保持研究, 2010, 17(2): 111-114. (LI Yongliang, LIN Hui, MA Yanhui. Study on drought monitoring by using MODIS data in Hunan Province [J]. Research of Soil and Water Conservation, 2010, 17(2): 111-114. (in Chinese))

(收稿日期: 2022-12-05 编辑: 彭桃英)

(上接第 31 页)

- [13] YANG Liu, MENG Xuhui, KARNIADAKIS G E. B-PINNs: bayesian physics-informed neural networks for forward and inverse PDE problems with noisy data [J]. Journal of Computational Physics, 2021, 425: 109913.
- [14] KHARAZMI E, ZHANG Zhongqiang, KARNIADAKIS G E. hp-vPINNs: variational physics-informed neural networks with domain decomposition [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2021, 374: 113547.
- [15] 王昀卓. 求解偏微分方程的神经网络方法[D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2021.
- [16] 李野, 陈松灿. 基于物理信息的神经网络: 最新进展与展望[J]. 计算机科学, 2022, 49(4): 254-262. (LI Ye, CHEN Songcan. Physics-informed neural networks: recent advances and prospects [J]. Computer Science, 2022, 49(4): 254-262. (in Chinese))
- [17] MAO Zhiping, JAGTAP A D, KARNIADAKIS G E. Physics-informed neural networks for high-speed flows [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2020, 360: 112789.
- [18] 尧少波, 何伟峰, 陈丽华, 等. 融合物理的神经网络方法在流场重建中的应用[J]. 空气动力学学报, 2022, 40(5): 30-38. (YAO Shaobo, HE Weifeng, CHEN Lihua, et

al. Physics informed neural network in flowfield reconstruction [J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2022, 40(5): 30-38. (in Chinese))

- [19] WANG Yongji, LAI Chingyao, GÓMEZ-SERRANO J, et al. Asymptotic self-similar blow-up profile for 3-D Euler via physics-informed neural networks[J/OL]. Arxiv Math. [2022-04-02]. <https://arxiv.org/abs/2201.06780>.
- [20] 张婷, 徐彬鑫, 康爱卿, 等. 流域水文、水动力、水质模型联合应用研究进展[J]. 水利水电科技进展, 2021, 41(3): 11-19. (ZHANG Ting, XU Binxin, KANG Aiqing, et al. Advances in joint application of hydrology, hydrodynamics and water environment models in river basins [J]. Advances in Science and Technology of Water Resources, 2021, 41(3): 11-19. (in Chinese))
- [21] 张雪, 王新宏, 董梁, 等. 基于有限差分法的跌坎冲刷一维数值模拟[J]. 水资源与水工程学报, 2021, 32(1): 172-178. (ZHANG Xue, WANG Xinhong, DONG Liang, et al. One-dimensional numerical simulation of riverbed headcut erosion process based on finite difference method [J]. Journal of Water Resources and Water Engineering, 2021, 32(1): 172-178. (in Chinese))

(收稿日期: 2022-05-03 编辑: 王芳)