

# 水质综合评价的模糊可变集合方法

陈守煜 郭 瑜

(大连理工大学土木水利学院, 辽宁 大连 116024)

**摘要** 基于立足全局的系统观,应用模糊可变集合,建立水质评价模型,把水质评价由定性转化为定量。该方法能够科学、合理地确定与水质相关的各个研究指标处于级别区间的隶属度、相对隶属函数,并根据指标重要性进行二元比较与量化,从而合理地确定出各个指标的权重。通过实际水质等级的级别特征值计算,对北京永定河水质进行了模糊可变集合评价。评价结果表明了该方法的可应用性。

**关键词** 水质评价;模糊可变集合;差异函数;级别特征值

中图分类号: X824 文献标识码: A 文章编号: 1004-693X(2005)06-0019-04

## Application of variable fuzzy sets method in comprehensive evaluation of water quality

CHEN Shou-yu, GUO Yu

(School of Civil and Hydraulic Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

**Abstract** :Under systematic view, a comprehensive evaluation model for water quality was established based on variable fuzzy sets method, and the water quality evaluation was converted from the qualitative assessment to a quantitative one. The method can scientifically and reasonably determine membership degrees and relative membership functions of water quality indexes at level interval. Weights of indexes can be obtained by binary comparison and quantification based on the importance of indexes. By calculating the characteristic value of each level, water quality of the Yongding River in Beijing was evaluated using the variable fuzzy sets method, which showed that the proposed method was feasible.

**Key words** :water quality evaluation; variable fuzzy sets; difference function; level characteristic values

文献 [1] 提出以模糊可变集合为核心的可变模糊集理论,它是模糊水文水资源学的数学基础。水环境污染是模糊概念,水环境质量评价是模糊水文水资源学的重要内容。本文提出水质综合评价模糊可变集合方法。它是在已经获取某些水环境质量指标值的基础上,通过所建立的数学模型,对某水体的质量等级进行综合评判。它为水体的污染防治和开发利用提供了科学依据,是国民经济可持续发展的重要工作之一。

水环境质量是一个关系复杂、模糊多变的体系,存在着大量不确定性因素,具有明显的随机性和模糊性,采用精确数学方法来研究这一模糊问题,显然存在着较大的困难。而模糊可变集合<sup>[1]</sup>综合评价能

有效地解决评价标准边界模糊和监测误差对评价结果的影响,并就模糊概念—重要性进行二元比较与量化,从而合理地确定出各个指标(或研究对象)的权重并建立水质综合评判模型,进而实现对水环境的综合评价。

### 1 模糊可变集合的原理

#### 1.1 模糊可变集合定义

设论域  $U$  上的一个模糊概念(事物、现象)  $A$ , 对  $U$  中的任意元素  $u (u \in U)$ , 在相对隶属函数的连续统数轴任一点上,  $\mu$  对表示吸引性质  $A$  的相对隶属度为  $\mu_A(u)$  对表示排斥性质  $A^c$  的相对隶属度为  $\mu_{A^c}(u)$ , 设

$$D_A(u) = \mu_A(u) - \mu_{A^c}(u) \quad (1)$$

$D_{\tilde{A}}(u)$  称为  $u$  对  $\tilde{A}$  的相对差异度。这里  $0 \leq \mu_{\tilde{A}}(u) \leq 1$   $0 \leq D_{\tilde{A}}(u) \leq 1$  映射

$$D_{\tilde{A}}: D \rightarrow [-1, 1] \\ u \mapsto D_{\tilde{A}}(u) \in [-1, 1] \quad (2)$$

称为  $u$  对  $\tilde{A}$  的相对差异函数。由于

$$\mu_{\tilde{A}}(u) + D_{\tilde{A}}(u) = 1 \quad (3)$$

$$\text{则} \quad D_{\tilde{A}}(u) = 2\mu_{\tilde{A}}(u) - 1 \quad (4)$$

$$\text{或} \quad \mu_{\tilde{A}}(u) = (1 + D_{\tilde{A}}(u))/2 \quad (5)$$

令

$$\mathcal{Y} = \{(u, D) \mid u \in U, D_{\tilde{A}}(u) = \mu_{\tilde{A}}(u) - \mu_{\tilde{A}}(u), D \in [-1, 1]\} \quad (6)$$

$$A_+ = \{u \mid u \in U, \mu_{\tilde{A}}(u) > \mu_{\tilde{A}}(u)\} \quad (7)$$

$$A_- = \{u \mid u \in U, \mu_{\tilde{A}}(u) < \mu_{\tilde{A}}(u)\} \quad (8)$$

$$A_0 = \{u \mid u \in U, \mu_{\tilde{A}}(u) = \mu_{\tilde{A}}(u)\} \quad (9)$$

$\mathcal{Y}$  称为  $U$  的模糊可变集合。 $A_+$ 、 $A_-$ 、 $A_0$  分别称为模糊可变集合  $\mathcal{Y}$  的吸引(为主)域、排斥(为主)域和渐变变质变界。设  $C$  是  $\mathcal{Y}$  的可变因子集,

$$C = \{C_A, C_B, C_C\} \quad (10)$$

$C_A$  为模型可变集,  $C_B$  为模型参数可变集,  $C_C$  为除模型及其参数外的可变其他因子集。令

$$A^+ = \alpha(A_-) = \{u \mid u \in U, \mu_{\tilde{A}}(u) < \mu_{\tilde{A}}(u), \mu_{\tilde{A}}(\alpha(u)) > \mu_{\tilde{A}}(\alpha(u))\} \quad (11)$$

$$A^- = \alpha(A_+) = \{u \mid u \in U, \mu_{\tilde{A}}(u) > \mu_{\tilde{A}}(u), \mu_{\tilde{A}}(\alpha(u)) < \mu_{\tilde{A}}(\alpha(u))\} \quad (12)$$

统一称为模糊可变集合  $\mathcal{Y}$  关于可变因子集  $C$  的可变域。令

$$A^{(+)} = \alpha(A_{(+)}) = \{u \mid u \in U, \mu_{\tilde{A}}(u) > \mu_{\tilde{A}}(u), \mu_{\tilde{A}}(\alpha(u)) > \mu_{\tilde{A}}(\alpha(u))\} \quad (13)$$

$$A^{(-)} = \alpha(A_{(-)}) = \{u \mid u \in U, \mu_{\tilde{A}}(u) < \mu_{\tilde{A}}(u), \mu_{\tilde{A}}(\alpha(u)) < \mu_{\tilde{A}}(\alpha(u))\} \quad (14)$$

统一称为模糊可变集合  $\mathcal{Y}$  关于可变因子集  $C$  的量子变域。

模糊可变集合模型包括笔者在工程模糊集理论中提出的模糊优选模型、模糊模式识别模型、模糊聚类循环迭代模型以及模糊决策、识别与聚类的统一模型等<sup>[21]</sup>。模型的参数可变集包括模型的指标权重、指标标准值等重要模型参数。

## 1.2 相对差异函数模型

设  $X_0 = [a, b]$  为实轴上模糊可变集合  $\mathcal{Y}$  的吸引域区间即  $\mu_{\tilde{A}}(u) > \mu_{\tilde{A}}(u)$  区间,  $X = [c, d]$  为包含  $X_0$  ( $X_0 \subset X$ ) 的某一值域区间。如图 1 所示。

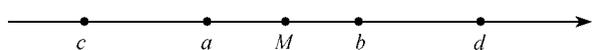


图 1 点  $x$ 、 $M$  与区间  $[a, b]$ 、 $[c, d]$  的位置关系

由模糊可变集合定义可知  $[c, a]$  与  $[b, d]$  均为其排斥(为主)域区间, 即  $\mu_{\tilde{A}}(u) < \mu_{\tilde{A}}(u)$  区间。设  $M$  为吸引(为主)域区间  $[a, b]$  中  $\mu_{\tilde{A}}(u) = 1$  的点值,  $M$  可根据实际问题确定, 应该指出  $M$  不一定为区间  $[a, b]$  的中点值。设  $x$  为  $X$  区间内的任意点的量值, 则  $x$  落入  $M$  点左侧时的差异函数公式为

$$D_{\tilde{A}}(u) = \begin{cases} \left(\frac{x-a}{M-a}\right)^\beta & x \in [a, M] \\ -\left(\frac{x-a}{c-a}\right)^\beta & x \in [c, a] \end{cases} \quad (15)$$

$x$  落入  $M$  点右侧时, 其差异函数公式为

$$D_{\tilde{A}}(u) = \begin{cases} \left(\frac{x-b}{M-b}\right)^\beta & x \in [M, b] \\ -\left(\frac{x-b}{d-b}\right)^\beta & x \in [b, d] \end{cases} \quad (16)$$

式中  $\beta$  为大于 0 的指数, 通常可取  $\beta = 1$  即线性函数。公式(15)与(16)满足: ①当  $x = a$ 、 $x = b$  时,  $D_{\tilde{A}}(u) = 0$  或  $\mu_{\tilde{A}}(u) = \mu_{\tilde{A}}(u) = 0.5$ ; ②当  $x = M$  时,  $D_{\tilde{A}}(u) = 1$  或  $\mu_{\tilde{A}}(u) = 1$ ; ③当  $x = c$ 、 $x = d$  时,  $D_{\tilde{A}}(u) = -1$  或  $\mu_{\tilde{A}}(u) = 0$ 。

## 2 水质综合评价实例

随着社会经济的发展, 北京市的水环境日趋恶化, 严重妨碍了社会经济的可持续发展。北京市有永定河、潮白河、北运河、大清河及蓟运河 5 条河流。对 5 条河流的水质进行综合评价是十分有必要的。本文以北京市永定河的水质评价为例, 利用文献 3~6 的数据说明模糊可变集合方法在该方面的应用。

评价指标是根据 GHZB 1—99《地面水环境质量标准》<sup>[6]</sup> 及主要影响这 5 条河流的水质指标而设置的, 共设置了 9 个评价指标: 溶解氧(DO) $x_1$ 、生化需氧量(BOD<sub>5</sub>) $x_2$ 、生化耗氧量(COD<sub>Cr</sub>) $x_3$ 、氨氮 $x_4$ 、酚 $x_5$ 、氟 $x_6$ 、砷 $x_7$ 、铬 $x_8$  和氟化物 $x_9$ 。据文献[6]评价标准, 一般将河流水质分为 5 个等级, 即 I 类、II 类、III 类、IV 类、V 类, 如表 1。实测永定河水水质 9 项指标值见表 2。

表 1 水环境质量评价标准 mg/L

水质指标	I 类	II 类	III 类	IV 类	V 类
$x_1$	20~8	8~6	6~5	5~3	3~2
$x_2$	0~3	3	3~4	4~6	6~10
$x_3$	0~15	15	15~20	20~30	30~40
$x_4$	0~0.5	0.5	0.5~1.0	1.0~2.0	2.0
$x_5$	0~0.002	0.002	0.002~0.005	0.005~0.01	0.01
$x_6$	0~0.005	0.005~0.05	0.05~0.2	0.2	0.2
$x_7$	0~0.05	0.05	0.05~0.2	0.2	0.2
$x_8$	0~0.01	0.01~0.05	0.05	0.05	0.05~0.1
$x_9$	0~1.0	1.0	1.0	1.0~1.5	1.5

表 2 永定河各项评定指标实测值 mg/L

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
9.30	4.12	3.22	0.47	0.0003	0.0003	0.001	0.007	0.96

根据表 1 并参考文献 [1], 可以构造模糊可变量集合差异函数各项参数(  $a, b, c, d, M$  )取值矩阵:

$$[a, b] = \begin{bmatrix} [20, 8] & [8, 6] & [6, 5] & [5, 3] & [3, 2] \\ [0, 3] & [3, 3] & [3, 4] & [4, 6] & [6, 10] \\ [0, 15] & [15, 15] & [15, 20] & [20, 30] & [30, 40] \\ [0, 0.5] & [0.5, 0.5] & [0.5, 1.0] & [1.0, 2.0] & [2.0, 2.0] \\ [0, 0.002] & [0.002, 0.002] & [0.002, 0.005] & [0.005, 0.01] & [0.01, 0.01] \\ [0, 0.005] & [0.005, 0.05] & [0.05, 0.2] & [0.2, 0.2] & [0.2, 0.2] \\ [0, 0.05] & [0.05, 0.05] & [0.05, 0.2] & [0.2, 0.2] & [0.2, 0.2] \\ [0, 0.01] & [0.01, 0.05] & [0.05, 0.05] & [0.05, 0.05] & [0.05, 0.1] \\ [0, 1.0] & [1.0, 1.0] & [1.0, 1.0] & [1.0, 1.5] & [1.5, 1.5] \end{bmatrix}$$

$$[c, d]_{ih=1} = \begin{bmatrix} [20, 6] \\ [0, 3] \\ [0, 15] \\ [0, 0.5] \\ [0, 0.02] \\ [0, 0.05] \\ [0, 0.05] \\ [0, 0.05] \\ [0, 1] \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 20 & 8 & 5.5 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3.5 & 6 & 10 \\ 0 & 15 & 17.5 & 30 & 40 \\ 0 & 0.5 & 0.75 & 2 & 2.0 \\ 0 & 0.002 & 0.0035 & 0.01 & 0.01 \\ 0 & 0.005 & 0.125 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.05 & 0.125 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.01 & 0.05 & 0.05 & 0.1 \\ 0 & 1.0 & 1.0 & 1.5 & 1.5 \end{bmatrix}$$

根据矩阵  $[a, b]$  与  $[c, d]$  与  $M$  判断评价指标  $x$  落入点  $M$  的左侧还是右侧, 据此选用式(15)或式(16), 以计算指标对等级标准的差异函数  $D_{\tilde{A}}(u_{ih})$ , 这里  $h=1, 2, 3, 4, 5$  为等级数,  $i=1, 2, \dots, 9$  为指标数, 以  $i=1, h=1$  为例作一说明。

由表 2 对于溶解氧(DO) $x_1$  由吸引(为主)矩阵  $[a, b]$  范围域矩阵  $[c, d]_{ih=1}$  和点值矩阵  $M$  得  $i=1$  的吸引域向量、范围量与点值  $M$  向量分别为

$$[a, b]_h = ([20, 8] [8, 6] [6, 5] [5, 3] [3, 2])$$

$$[c, d]_{11} = [20, 6] \quad M_{1h} = (20 \ 8 \ 5.5 \ 3 \ 2)$$

当  $h=1$  时, 溶解氧(DO) $x_1=9.30$ , 而  $c_{11}=20$ ,  $a_{11}=20$ ,  $b_{11}=8$ ,  $d_{11}=6$ ,  $M_{11}=20$ , 由此可判断出溶解氧(DO)值 9.30 落在  $M_{11}$  的右侧, 且属于区间  $[M_{11}, b_{11}]$ , 所以选用公式(16)中的  $D_{\tilde{A}}(u_{11}) = \frac{(x_{11} - b_{11})^\beta}{(M_{11} - b_{11})^\beta}$ 。将  $\beta=1$  及有关数据代入该式可得

$D_{\tilde{A}}(u_{11})=0.1083$ , 由式(5)得  $\mu_{\tilde{A}}(u_{11})=0.554$ 。类似地可得到  $i=1, 2, \dots, 9$ , 对级别  $h=1, 2, 3, 4, 5$  的各单指标相对隶属度矩阵为

$$\mu_{\tilde{A}}(u_{ih})_{9 \times 5} = \begin{bmatrix} 0.554 & 0.446 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.470 & 0.530 & 0.030 \\ 0.893 & 0.107 & 0 & 0 & 0 \\ 0.530 & 0.470 & 0 & 0 & 0 \\ 0.925 & 0.075 & 0 & 0 & 0 \\ 0.970 & 0.030 & 0 & 0 & 0 \\ 0.990 & 0.010 & 0 & 0 & 0 \\ 0.650 & 0.350 & 0 & 0 & 0 \\ 0.520 & 0.480 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

为了得到各指标的综合相对隶属度, 应用文献 [7] 提出的模糊可变识别模型

$$u_h = \frac{1}{1 + \left\{ \frac{\sum_{i=1}^m [w_i (1 - \mu_{\tilde{A}}(u_{ih}))]^p}{\sum_{i=1}^m (w_i \mu_{\tilde{A}}(u_{ih}))^p} \right\}^{\frac{\alpha}{p}}} \quad (17)$$

可得水质评价各指标综合相对隶属度, 再将之归一化即可得到归一化的各指标综合相对隶属度值。式中  $w_i$  为指标权重,  $m$  为识别指标数,  $\alpha$  为模型优化准则参数,  $\alpha=1$  为最小一乘方准则,  $\alpha=2$  为最小二乘方准则;  $p$  为距离参数,  $p=1$  为海明距离,  $p=2$  为欧氏距离。

为确定 9 个指标相对于 5 个级别的权值, 应用文献 [7] 提出的确定指标权重重要性排序一致性定理, 经认真考虑及工程实践, 得到通过检验的 9 个指标重要性排序一致性标度矩阵:

$$F = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \text{排序} \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & (5) \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & (7) \\ 1 & 1 & 1 & 0.5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & (3) \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0.5 & 1 & 1 & 1 & 1 & (2) \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 & 1 & 1 & (1) \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0 & (3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & (5) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0.5 & (9) \\ & & & & & & & & & (7) \end{bmatrix}$$

按矩阵  $F$  关于重要性的排序, 运用经验知识, 以排序为(1)的指标(酚)逐一地与排序为(2)(3), (5)(7)(9)的指标做关于重要性程度的二元比较判断如下:

排序为(1)的指标酚与排序为(2)的指标氨氮相比, 处于“稍稍”与“略为”之间; 与排序为(3)的指标生化耗氧量与氰相比, 处于“略为”与“较为”之间; 与排序为(5)指标溶解氧与砷相比, 处于“明显”与“显著”之间; 与排序为(7)的指标生化需氧量与氟化物相比, 处于“十分”与“非常”之间; 与排序为(9)的指

表3 语气算子与模糊标度、相对隶属度的对应关系

语气算子	同样	稍稍	略为	较为	明显					
模糊标度	0.500	0.525	0.550	0.575	0.600	0.625	0.650	0.675	0.700	0.725
相对隶属度	1.000	0.905	0.818	0.729	0.667	0.600	0.538	0.481	0.429	0.379
语气算子	显著	十分	非常	极其	极端	无可比拟				
模糊标度	0.750	0.775	0.800	0.825	0.850	0.875	0.900	0.925	0.950	0.975
相对隶属度	0.333	0.290	0.250	0.212	0.176	0.143	0.111	0.081	0.053	0.026

标铭相比,处于“极其”与“极端”之间(表3)。

由语气算子与相对隶属度之间的关系表<sup>[7]</sup>可得9项评价指标的权向量为

$$w' = (0.379 \ 0.212 \ 0.600 \ 0.739 \ 1 \ 0.600, \\ 0.379 \ 0.081 \ 0.212) = (w'_i)$$

则指标的归一化权重向量为

$$w = (0.0902 \ 0.0505 \ 0.1428 \ 0.1759 \ 0.2380, \\ 0.1428 \ 0.0902 \ 0.0191 \ 0.0505) = (w_i)$$

此时就可应用模糊可变识别模型(17)计算水质评价各指标综合相对隶属度,取模型优化准则参数 $\alpha = 1$ 、距离参数 $p = 1$ ,将相关数值代入模型(17),解得综合相对隶属度为

$$u'_h = (0.7577 \ 0.1923 \ 0.0240 \ 0.0270 \ 0.0015)$$

归一化后得

$$u_h = (0.7558 \ 0.1919 \ 0.0239 \ 0.0269 \ 0.0015)$$

应用文献7]的级别特征值公式,得到水质评价的级别特征值为

$$H = (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5) \cdot (0.7558 \ 0.1919 \ 0.0239, \\ 0.0269 \ 0.0015)^T = 1.3264$$

对于5级水质的评价标准来说,当 $1.0 \leq H \leq 1.5$ ,则水质属于I类; $1.5 < H \leq 2.5$ ,属于II类; $2.5 < H \leq 3.5$ ,属于III类;当 $3.5 < H \leq 4.5$ ,属于IV类;当 $4.5 < H \leq 5.0$ ,则水质属于V类。由级别特征值1.3264,则北京永定河的水质等级属于I类水,略偏于II类。可用于集中式生活饮用水水源地一级保护区、珍贵鱼类保护区和鱼虾产卵场,评价结果与文献[3]基本相符。下面列出文献3]综合隶属度向量:

$$u_h = (0.7568 \ 0 \ 0.2286 \ 0.0146 \ 0)$$

与评价相对位置 $B^* = 1.168$ (属于I类)。评价结果与本文一致,但本文方法比文献3]简单。

文献8]用可拓工程方法<sup>[9]</sup>对永定河水质进行评价,得到综合关联度向量为

$$K_h(P) = (0.4362 \ 0.2814 \ 0.2868, \\ -0.3612, -0.4647)$$

按文献9]最大关联度评定准则, $K_h(P) = \max K_h(P) = 0.4362$ ,评为I类水。但可拓学评价由于①关联函数基本公式的错误<sup>[10]</sup>(无论对递增系列 $c < a < b < d$ 还是递减系列 $c > a > b > d$ 都错);②最大关联度评定准则的逻辑错误<sup>[11]</sup>,故本文不作比较。

### 3 讨论与结语

a. 差异函数概念是对客观事物运动发展变化、量变与质变,及其转化的本质——吸引与排斥的一种描述,符合自然辩证法原理。模糊可变集合概念、理论与方法,是工程模糊集相对隶属度可变理论的发展,提出的模糊可变概念、理论、模型与方法,是作者在长期从事水利水电与水文水资源工程实践中提出的理论与工程方法,其基本原理与方法,将继续在实际应用中检验、提高与发展。

b. 应用模糊可变集合的差异函数方法,科学、合理地确定与水质相关的各个研究对象(或指标)处于级别区间的隶属度、相对隶属函数,并且运用人的基本经验与知识,对大量复杂的定性指标,反复就关于模糊概念—重要性进行二元比较与量化,最终合理地确定出各个指标(或研究对象)的权重,从而实现对水质从定性到定量的综合集成评价。实例证明,本文所提方法是合理的。

#### 参考文献:

- [1] 陈守煜. 工程可变模糊集理论与模型——模糊水文水资源学数学基础[J]. 大连理工大学学报, 2005, 45(2): 308~312.
- [2] 陈守煜. 复杂水资源系统优化模糊识别理论与应用[M]. 长春: 吉林大学出版社, 2002.
- [3] 潘峰, 付强, 梁川. 模糊综合评价在水环境质量综合评价中的应用研究[J]. 环境工程, 2002, 20(2): 58~60.
- [4] 姜文来. 水资源价值论[M]. 北京: 科学出版社, 1998.
- [5] 高荣松. 环境影响评价原理和方法[M]. 成都: 四川科学技术出版社, 1989.
- [6] GHZB1—99 地面水环境质量标准[S].
- [7] 陈守煜. 工程模糊集理论与应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 1998.
- [8] 梁虹, 荀志远. 可拓学理论在水质综合评价中的应用研究[J]. 环境污染治理技术与设备, 2004, 5(7): 25~29.
- [9] 蔡文, 杨春燕, 林伟初. 可拓工程方法[M]. 北京: 科学出版社, 1997.
- [10] 陈守煜. 可变模糊方法及论可拓关联函数基本公式错误[J]. 水电能源科学, 2005, 23(5): 1~4.
- [11] 陈守煜, 郭瑜. 电力负荷预测的可变模糊集合方法[J]. 水电能源科学, 2005, 23(5): 29~31.

(收稿日期: 2005-05-09 编辑: 徐娟)