

DOI:10.3969/j.issn.1004-6933.2013.02.004

中小河道突发事故污染源强非稳态过程反问题

金文龙¹, 彭 辉², 高俊杰², 潘曼曼², 韩龙喜¹

(1. 河海大学环境学院, 江苏 南京 210098; 2. 水利部水文局, 北京 100053)

摘要:根据中小型河流水动力特性及突发性水污染事故污染物排放特征,将污染源概化为分布于某一时段的非连续源,基于一维对流-扩散方程,依据事故下游断面污染物浓度的时间序列观测资料,构造中小型河道突发水污染事故污染源强的反问题,给出反问题的数学求解方法。并构造典型案例,通过一维对流分散问题的解析解,对反问题的求解方法进行验证。

关键词:环境水力学;突发水污染事故;中小型河道;反问题

中图分类号:X11 文献标志码:A 文章编号:1004-6933(2013)02-0018-04

Inverse problem of unsteady source intensity change process in sudden pollution accidents in medium- and small-sized rivers

JIN Wenlong¹, PENG Hui², GAO Junjie², PAN Manman², HAN Longxi¹

(1. College of Environment, Hohai University, Nanjing 210098, China;
2. Bureau of Hydrology, Ministry of Water Resources, Beijing 100053, China)

Abstract: Considering the characteristics of water dynamics in medium- and small-sized rivers and pollutant emission in sudden water pollution accidents, the pollution source was generalized as a discontinuous source distributing over a time period. Based on the one-dimensional convection-diffusion equation and observation information of the time sequence of pollutant concentration in a downstream section where the accidents happened, an inverse problem of the source intensity change process in sudden water pollution accidents in medium- and small-sized rivers was established, and a mathematical method for solving this inverse problem was given. A typical case was structured to verify the solving method, through the analytical solution to the convection-diffusion equation.

Key words: environmental hydraulics; sudden water pollution accident; medium- and small-sized rivers; inverse problem

随着我国社会经济的迅速发展,突发性水污染事故频频发生,由于突发水污染事故的不确定性及发现时间的滞后性,一般情况下很难及时监测到完整的污染源排放历史,给事故发生后的预警预报与处置工作带来困难。因此,如何在突发性水污染事故发生后,根据下游污染物浓度分布等信息反演完整的污染源排放历史具有重要意义。

在环境水力学反问题领域,地表水污染源的反演问题通常被提为源项识别反问题,其主要任务是根据环境水力学测量数据,来反推污染源的信息,如污染源的强度和位置等。目前相关方面的研究尚不

成熟,Akcelika 等^[1]采用变分有限元方法求解了对流扩散运输的源项反演问题;Wang 等^[2]提出了多孔介质流动中的源项识别的马尔科夫随机场模型;Ling 等^[3]从理论上研究了二维对流扩散方程的源项位置识别问题;闵涛等^[4]将对流-扩散方程源项识别反问题转化为优化问题,并用遗传算法求解;韩龙喜^[5]以污水处理费用最小为目标函数,采用遗传算法求解了一维水质模拟带约束条件的污染物排放量控制反问题;并构造了河网地区带约束条件的污染源控制反问题^[6],并采用约束最优化算法中的简约梯度法成功求解。王泽文等^[7]研究了流域中单个点污染源识别问题的唯一性、稳定性和反演算法。

基金项目:水利部公益性行业科研专项(201101031)
作者简介:金文龙(1988—),男,硕士研究生,研究方向为环境水力学。E-mail:kinnlong@163.com

地表水污染源的反演问题也可被提为边界条件反问题,金忠青等^[8]分别应用脉冲谱-优化法和Green函数法求解了一维、二维对流-扩散方程边界条件控制反问题,基本解决了恒定水体中上游污染控制问题;韩龙喜等^[9]首次给出水网地区无约束的水质边界浓度反问题的提法,并采用局部基本解展开算法进行稳态条件下边界浓度反演;李子^[10]将识别突发性污染源以及模拟污染物浓度时空变化过程提为边界条件控制反问题,并对以GST-MQ(global space time-multi quadric)配点法为基础的反演方法进行了研究。

总体而言,关于污染源反演问题的研究主要集中在污染源排放位置或排放区域已知情况下的排污(污染源)的控制问题以及对边界上浓度变化过程的反演,很少涉及直接对污染源源强变化过程的反演。因此,笔者在污染源位置已知的情况下,根据事故下游某断面一组污染物浓度的时间序列观测资料,提出了中小型河道一维突发性水污染事故源强变化过程的反问题。在反问题的求解方法上,笔者运用了径向基配点法,该方法作为一种新兴的无网格方法具有不依赖于控制方程的形式、multi-quadric(MQ)函数的插值精度高、求解反问题与正问题计算过程相同、不需要迭代优化过程以及对测量数据有较强的适应性等独特优势。

1 问题的数学描述

1.1 中小型河道一维水质模型

假定研究水域是长度为 L 的中小型河道,污染源位于研究水域上边界($x=0$)处,河道宽度和深度均远小于河段的长度,当污染事故发生时,污染物在对流、扩散过程的作用下在水域 $[0,L]$ 内随水体迁移扩散,对于中小型河道,河段一般较为顺直,因此污染物的断面平均浓度 C 沿河段的分布可用源项为零的一维对流-扩散方程来描述:

$$\frac{\partial C}{\partial t} - D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + u \frac{\partial C}{\partial x} + KC = 0 \quad (1)$$

式中: D 为扩散系数; t 为时间; x 为空间坐标; u 为流速; K 为污染物降解系数。

其初始条件为: $C(x,0) = C_0(x)$ (2)

上边界条件用源强的变化过程 $S(t)$ 来表示:

$$C(0,t) = \frac{S(t)}{Q} + C_0 \quad (3)$$

式中: Q 为流量; C_0 为上游边界($x=0$)处的背景浓度。

下边界为Neumann边界条件:

$$\left. \frac{\partial C(x,t)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad (4)$$

当 $D,u,K,C_0(x),C_0,S(t)$ 已知时,式(1)~(4)构成河流一维水质模拟分析的适定问题即正问题,可采用常规的计算方法预测水域中任何时刻的污染物浓度分布 $C(x,t)$ 。为研究简便计,不妨构造一个污染源,根据突发性水污染事故的特点,假定污染源为分布于某一时段的非连续源,其源强变化过程的数学描述为:

$$S(t) = A_s [H(t) - H(t - T_s)] \quad (5)$$

其中 H 为阶跃函数:

$$\begin{cases} H(x) = 0 (x \leq 0) \\ H(x) = 1 (x > 0) \end{cases}$$

式中: A_s 为源强排放峰值; T_s 为排放的持续时间。

假定初始条件 $C_0(x) = 0$,则定解问题式(1)~(4)的解析解为:

$$C(x,t) = \frac{A_s}{2Q} \exp\left(\frac{ux}{2D}\right) \left\{ [\operatorname{erfc}(B_1 + B_3) - \operatorname{erfc}(B_2 + B_4)] H(t - T_s) \right\} \exp(B_0) + [\operatorname{erfc}(B_1 - B_3) - \operatorname{erfc}(B_2 - B_4)] H(t - T_s) \exp(-B_0) \quad (6)$$

其中: $B_0 = \frac{x}{\sqrt{D}} \sqrt{\frac{u^2}{4D} + K}$; $B_1 = \frac{x}{2\sqrt{Dt}}$; $B_2 = \frac{x}{2\sqrt{D(t - T_s)}}$;

$$B_3 = \sqrt{\frac{u^2 t}{4D} + Kt}$$
; $B_4 = \sqrt{\frac{u^2 (t - T_s)}{4D} + K(t - T_s)}$ 。

1.2 反问题的提法

由于突发水污染事故的不确定性,一般情况下很难及时监测到完整的源强变化过程 $S(t)$,从而导致边界条件 $C(0,t)$ 的缺失,对求解正问题造成困难。为初步判断污染源的真实情况,一类有效的方法就是在污染源下游某断面 $x=l$ 处设置观测点,通过采样观测,获得一组污染物浓度的时间序列观测资料:

$$C(l,t_q) = h(t_q) \quad (q = 1, 2, \dots, W) \quad (7)$$

式中, W 为观测数据的个数。

通过这组观测数据来反演源强的变化过程,这就构成了一类源强变化过程的反问题。这类反问题的实质是给出方程的部分解来确定控制方程的边界条件,根据环境水力学反问题的观点,即为边界条件控制反问题。应当指出的是,从物理角度出发,边界条件和污染源项是两个不同的概念,但在水质模型中,当污染源位于边界时边界条件反问题与源项反问题常是可以相互转换的,两者从数学角度看处理方法是一致的^[11]。

2 反问题的求解方法

2.1 最小二乘GST-MQ配点法简介

径向基函数配点法是求解偏微分方程的一种配

点型无网格法,它的基本思想是把未知函数用一组径向基函数的线性组合来表示,然后再令域内的各节点满足控制方程,边界上各节点满足一致边界条件^[12]。最小二乘-径向基函数配点法的基本思想是用径向基函数逼近未知函数后,令控制方程在包括区域内和边界上的所有节点上满足,而初始条件、边界条件等则在其各自相应的节点上满足,最后利用最小二乘法求解超定线性方程组^[13-14]。相对于传统径向基配点法,最小二乘-径向基配点法可以松弛边界上各节点,满足边界条件这一要求,从而改善线性方程组中系数矩阵的病态条件,提高解的精度。

MQ 函数是由 Hardy 于 1968 年提出来的一种径向基函数^[15]。对于一维空间,MQ 函数的形式为

$$\phi_k(x) = \sqrt{c^2 + \|x - x_k\|^2} \quad (8)$$

式中: c 为形状参数; x_k 为空间基点坐标。

逆 MQ 函数的形式为

$$\phi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{c^2 + \|x - x_k\|^2}} \quad (9)$$

由于 MQ 函数和逆 MQ 函数都只是空间距离的函数,只能用于求解稳态问题,而在水质模拟分析中,污染物的浓度变化是个非稳态的过程,因此引入全时空的概念,将时间维看作伪空间,进而将时间变量直接插入基函数形式中构造新的径向基函数。以逆 MQ 函数为例进行构造,新构造的 GST-MQ 径向基函数形式为:

$$\phi_{ij}(X, t) = 1 / \sqrt{c'^2 + \|x - x_i\|^2 + \omega^2(t - t_j)^2} \quad (10)$$

其中 $c' = c_0 \sqrt{\|\Delta x\|^2 + \omega^2(\Delta t)^2}$
式中: ω 为引入的时空比例因子,以平衡时间和空间的属性差异; t_k 为基点时间; Δx 为空间上的配点距离; Δt 为时间上的配点距离; c_0 为形状参数相对值。

2.2 计算步骤

a. 将空间区域 $[0, L]$ 和计算时间范围 $[0, T]$ 分别用 N 和 M 个节点离散,则污染物浓度 $C(x, t)$ 可由一组 GST-MQ 径向基函数近似为:

$$C(x, t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \alpha_{ij} \phi_{ij}(x, t) \quad (11)$$

$$\text{其中 } \phi_{ij}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{c'^2 + (x - x_i)^2 + \omega^2(t - t_j)^2}}$$

$$(i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M)$$

式中: α_{ij} 为待定系数; N, M 分别为空间区域 $[0, L]$ 和计算时间范围 $[0, L]$ 上的配点总数。

b. 将式(11)代入式(1),并在时空区域及边界上的所有节点上满足,可得一个关于 α_{ij} 、有 $N \times M$ 个方程、 $N \times M$ 个未知数的方程组:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M F[\phi_{ij}(x_p, t_q)] \alpha_{ij} = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, N; q = 1, 2, \dots, M) \quad (12)$$

其中 F 为控制方程, $F = \frac{\partial}{\partial t} - D \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u \frac{\partial}{\partial x} + K$ 。

c. 将式(11)代入式(2),并在空间区域 $[0, L]$ 的所有配点及 $t=0$ 上满足,可得一个关于 α_{ij} 、有 N 个方程、 $N \times M$ 个未知数的方程组:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \phi_{ij}(x_p, 0) \alpha_{ij} = 0 (p = 1, 2, \dots, N) \quad (13)$$

d. 将式(11)代入式(4),并在 $x=L$ 及时间范围 $[0, T]$ 的所有配点上满足,可得一个关于 α_{ij} 、有 M 个方程、 $N \times M$ 个未知数的方程组:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{\partial \phi_{ij}(L, t_q)}{\partial x} \alpha_{ij} = 0 (q = 1, 2, \dots, M) \quad (14)$$

e. 将式(11)代入式(7),并在 $x=l$ 及观测时间 $\{t_q; q=1, 2, \dots, W\}$ 上满足,可得一个关于 α_{ij} 、有 W 个方程、 $N \times M$ 个未知数的方程组:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \phi_{ij}(l, t_q) \alpha_{ij} = h(t_q) \quad (15)$$

则式(10)~(13)构成了一个关于 α_{ij} 、含有 $N \times M$ 个未知数、 $N \times M + N + M + W$ 个方程的超定线性方程组,即最小二乘问题: $\min \{\|A\alpha - b\|_2\}$ 。用奇异值分解法解这个最小二乘问题可得系数 α_{ij} ,再利用式(3)可反演得源强变化过程 $S(t)$ 。

3 数值算例

假定事故水域范围 $L = 5\,000\text{ m}$, 计算时间 $T = 10\,000\text{ s}$, 水体流动速度 $u = 0.5\text{ m/s}$, 流量 $Q = 20\text{ m}^3/\text{s}$, 扩散系数 $D = 1.0\text{ m}^2/\text{s}$, 污染物降解系数 $K = 0.0001\text{ s}^{-1}$ 。假定源强峰值 $A_s = 200\text{ g/s}$, 污染物排放时间 $T_s = 5\,000\text{ s}$, 观测断面位于 $l = 1\,000\text{ m}$ 处, 观测起讫时间为事发后 $400 \sim 10\,000\text{ s}$ 时间段, 观测频次为每隔 400 s 观测一次, 对应的观测数据个数 $W = 25$ 个。

首先由正问题的解析解式(6)给出一组观测数据的理论值,再由式(16)生成观测误差并附加到理论值,作为实际的观测数据值:

$$h(t_q) = h'(t_q) + e\omega_q h'(t_q) (q = 1, 2, \dots, W) \quad (16)$$

式中: $h(t_q)$ 为构造的观测数据的实际值; $h'(t_q)$ 为观测数据的理论值; e 为误差水平; ω_q 为一组符合标准正态分布的随机数。

用式(7)和式(16)分别计算观测数据的理论值 $h'(t_q)$ 和实际值 $h(t_q)$, 误差水平 e 取 0.02 , 部分计算结果见表 1。

表 1 计算的观测数据理论值和实际值的部分结果

t/s	$h'(t_q)/$ ($g \cdot m^{-3}$)	$h(t_q)/$ ($g \cdot m^{-3}$)	t/s	$h'(t_q)/$ ($g \cdot m^{-3}$)	$h(t_q)/$ ($g \cdot m^{-3}$)
400	0.00	0.00	6400	8.19	8.01
1600	0.00	0.00	7600	0.00	0.00
2800	8.19	8.28	8800	0.00	0.00
4000	8.19	8.15	10000	0.00	0.00
5200	8.19	8.22			

最小二乘 GST-MQ 配点法的计算参数有:空间上的配点总数 N 、时间上的配点总数 M 、形状参数 c_0 、和时空比例因子 ω 。对于空间和时间上的配点总数 N 、 M ,一般情况下, N 和 M 越大,计算结果越精确,但计算机所需内存越多,计算时间越长,本文在计算时取 $N=51$ 、 $M=26$ 。对于形状参数 c_0 和时空比例因子 ω ,反演误差对这两个参数的取值较为敏感,本文经试算分析,在计算时取 $c_0=1.5$ 、 $\omega=1.4$ 。

根据表 1 中的观测数据的实际值,使用最小二乘 GST-MQ 配点法程序对源强变化过程 $S(t)$ 进行反演。另外,为减小计算结果的波动,提高反演精度,对源强增加约束条件,使源强不小于 0,即 $S(t) \geq 0$ 。经计算,反演计算结果与真实值的比较见图 1。

由图 1 可知:在 $t=0\text{ s}$ 和 $t=T_s=5\,000\text{ s}$ 附近, $S(t)$ 的反演解与真实值偏差较大,这是由于 $t=0\text{ s}$ 时刻污染源排放突然开始, $t=5\,000\text{ s}$ 时刻污染源排放突然停止造成的。在数学上, GST-MQ 径向基函数连续可导,因此用连续光滑的反演解描述真实排放过程在 $t=0\text{ s}$ 和 $t=5\,000\text{ s}$ 处的间断性。在其他时段, $S(t)$ 的反演解在真实值附近波动,大致反映了污染源的排放过程。总体而言, $S(t)$ 的反演解在大多数时段比较接近污染源的真实情况,反演结果较为准确。

4 结 语

根据中小型河道特点以及突发性水污染事故的特征,用污染源下游某断面污染物浓度的时间序列观测资料作为附加条件,提出了突发性水污染事故污染源强变化过程反问题,并用最小二乘 GST-MQ 配点法对反问题进行了求解。数值算例表明,反问题的计算结果准确合理。

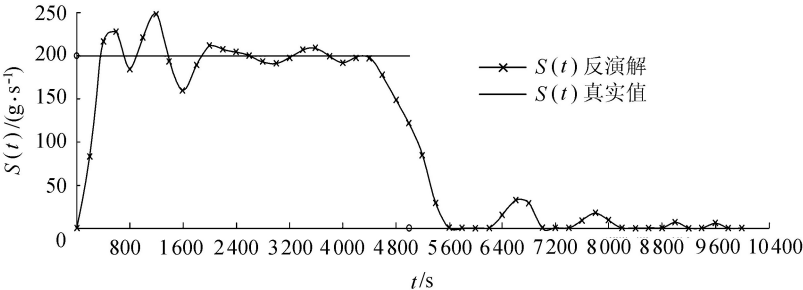


图 1 $S(t)$ 的反演解和真实值比较

参考文献:

[1] AKCELIKA V, BIROS G, GHATTAS O, et al. A variational finite element method for source inversion for convective-diffusive transport [J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2003, 39: 683-705.

[2] WANG J, ZABARAS N. Using bayesian statistics in the estimation of heat source in radiation [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2005, 48: 15-29.

[3] LING L, YAMAMOTO M, HON Y C, et al. Identification of source locations in two-dimensional heat equations [J]. Inverse Problems, 2006, 22: 1289-1305.

[4] 闵涛, 周孝德, 张世梅, 等. 对流-扩散方程源项识别反问题的遗传算法 [J]. 水动力学研究与进展: A 辑, 2004, 19 (4): 520-524. (MIN Tao, ZHOU Xiaode, ZHANG Shimei, et al. Genetic algorithm to an inverse problem of source term identification for convection-diffusion equation [J]. Chinese Journal of Hydrodynamics, 2004, 19 (4): 520-524. (in Chinese))

[5] 韩龙喜. 河道一维污染源控制反问题 [J]. 水科学进展, 2001, 12 (1): 39-44. (HAN Longxi. Inverse problem on amount of pollutant into natural channel [J]. Advances in Water Science, 2001, 12 (1): 39-44. (in Chinese))

[6] 韩龙喜, 朱党生. 河网地区水环境规划中的污染源控制方法 [J]. 水利学报, 2001 (10): 28-31. (HAN Longxi, ZHU Dangsheng. The pollutant source control method for network water environment management [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2001 (10): 28-31. (in Chinese))

[7] 王泽文, 邱淑芳. 一类流域点污染源识别的稳定性与数值模拟 [J]. 水动力学研究与进展: A 辑, 2008, 23 (4): 364-371. (WANG Zewen, QIU Shufang. Stability and numerical simulation of pollution point source identification in a watershed [J]. Chinese Journal of Hydrodynamics, 2008, 23 (4): 364-371. (in Chinese))

[8] 金忠青, 陈夕庆. 用脉冲谱-优化法求解对流-扩散方程边界条件控制反问题 [J]. 河海大学学报: 自然科学版, 1991, 19 (1): 1-8. (JIN Zhongqing, CHEN Xiqing. Numerical solution to an inverse problem of boundary condition control for convection-diffusion equations by PST-Optimization [J]. Journal of Hohai University: Natural Sciences, 1991, 19 (1): 1-8. (in Chinese))

输运扩散过程。利用实测资料验证结果表明,无论是流场的整体形态,还是验证点的水位、流速都与实际情况符合较好,模型计算精度较高。利用该模型可进一步预测排污口退水对环境影响范围和程度,为排污口设置论证、环境影响评价,提供技术依据。

采用的四边形网格适合于浅水方程的计算,但该网格在河岸附近边界的贴合不是很好,比较理想网格划分方案的是在河道主槽应用四边形网格,在河岸附近用三角形网格拟合边界,因此在今后的计算研究中可考虑采用四边形-三角形混合网格。

参考文献:

[1] 张鸿星,褚君达. 潮汐河口污染带影响因素研究[J]. 水资源保护,2003(5):35-38. (ZHANG Hongxing, ZHU Junda. Factors affecting the pollution belt at tidal estuaries [J]. Water Resources Protection, 2003(5):35-38. (in Chinese))

[2] 张龙江,朱维斌. 长江南通段污染带影响因素研究[J]. 上海环境科学,2003,22(1):36-38,45. (ZHANG Longjiang, ZHU Weibin. Study on affected factors of Nantong Reach of Yangzi River pollution zone [J]. Shanghai Environmental Sciences, 2003,22(1):36-38,45. (in Chinese))

[3] 赵棣华,李湜来,陆家驹. 长江江苏段二维水流水质模拟[J]. 水利学报,2003(6):75-77(ZHAO Dihua , LI Tilai , LU Jiaju. 2-D depth-averaged flow-pollutions model for Jiangsu reaches in Yangtze River[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2003(6):75-77. (in Chinese))

[4] 逢勇,赵棣华,姚琪,等. 长江江苏段区域供水水源地水

质可达性研究[J]. 水科学进展,2003,14(2):184-188. (PANG Yong, ZHAO Dihua, YAO Qi, et al. Reaching function analysis of water quality in large water supply planning in the Yangtze River in Jiangsu province [J]. Advances In Water Science, 2003,14(2):184-188. (in Chinese))

[5] 傅慧源. 长江干流水域纳污能力及限排总量研究[J]. 人民长江,2008,39(23):40-42. (FU Huiyuan. Study on water environmental capacity and limiting the total amount in the Yangtze River Basin[J]. Yangtze River, 2008,39(23):40-42. (in Chinese))

[6] 蒋艳,杨珏,赵棣华,等. 浅水流动有限体积法/Osher 格式的二维水流-水质模拟[J]. 农村生态环境,2002,18(3):30-33. (JIANG Yan,YAN Yu, ZHAO Dihua, et al. Finite volume methods and osher scheme for two-dimensional shallow water flow-pollutant coupled numerical model[J]. Rural Eco-environment, 2002,18(3):30-33. (in Chinese))

[7] 许仁义,逢勇. 闽江干流下游河段纳污能力的研究[J]. 环境科学与技术,2006,29(5):62-64. (XU Renyi, PANG Yong. Receiving ability for pollution into lower reaches of Minjiang River[J]. Environmental Science & Technology, 2006,29(5):62-64. (in Chinese))

[8] 李小虎,韩龙喜,吴云波,等. 潮汐河流排污口设置对水质的影响[J]. 水资源保护,2011,27(6):88-91,96. (LI Xiaohu,HAN Longxi,WU Yunbo,et al. Influence of setup of drain outlet for tidal river on water quality [J]. Water Resources Protection, 2011,27(6):88-91,96. (in Chinese))

(收稿日期:2012-03-06 编辑:高渭文)

(上接第 21 页)

[9] 韩龙喜,蒋莉华,朱党生. 组合单元水质模型中的边界条件及污染源项反问题[J]. 河海大学学报:自然科学版,2001,29(5):23-26. (HAN Longxi, JIANG Lihua, ZHU Dangsheng. Inverse problem on boundary condition and pollutant source in water quality model of river network [J]. Journal of Hohai University: Natural Sciences, 2001,29(5):23-26. (in Chinese))

[10] 李子. 基于 GST-MQ 配点法的突发水污染事故反演模型研究[D]. 北京:清华大学,2010.

[11] 刘晓东,姚琪,薛红琴,等. 环境水力学反问题研究进展[J]. 水科学进展,2009,20(6):885-890. (LIU Xiaodong, YAO Qi, XUE Hongqin, et al. Advance in inverse problems of environmental hydraulics [J]. Advances in Water Science, 2009,20(6):885-890. (in

Chinese))

[12] 刘芳. 径向基函数配点法的应用及其误差估计[D]. 苏州:苏州大学,2008.

[13] ROCCA A L, POWER H. A double boundary collocation hermitian approach for the solution of steady state convection-diffusion problems [J]. Computers and Mathematics with Applications,2008,55:1950-1960.

[14] CHEN W, TANAKA M. New insights into boundary-only and domain-type RBF methods [J]. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation,2000,1(3):145-152.

[15] 魏义坤. 径向基函数插值法解偏微分方程及计算渗流问题[D]. 成都:成都理工大学,2009.

(收稿日期:2012-05-29 编辑:徐 娟)