

DOI:10.3880/j.issn.1004-6933.2020.03.005

# 基于快速傅里叶变换的降水空间变异函数有效性验证

陈紫阳<sup>1,2</sup>, 胡庆芳<sup>2</sup>, 雍斌<sup>1</sup>, 李伶俐<sup>2</sup>, 王银堂<sup>2</sup>

(1. 河海大学地球科学与工程学院, 江苏 南京 211100;  
2. 南京水利科学研究院水文水资源与水利工程科学国家重点实验室, 江苏 南京 210029)

**摘要:**为验证基于快速傅里叶变换的降水空间变异函数的有效性,介绍了传统和基于快速傅里叶变换两种计算方法的变异函数,并以淮河流域某区域为例,在年、月、日3种时间尺度上验证了基于快速傅里叶变换方法的计算结果。结果表明该方法得到的降水空间变异函数值能够有效反映不同时间尺度上的降水在空间上的各向异性变化特征。

**关键词:**降水; 变异函数; 快速傅里叶变换; 淮河流域

**中图分类号:**TV125 **文献标志码:**A **文章编号:**1004-6933(2020)03-0022-06

**Validation of precipitation spatial variogram based on fast Fourier transformation** // CHEN Ziyang<sup>1,2</sup>, HU Qingfang<sup>2</sup>, YONG Bin<sup>1</sup>, LI Lingjie<sup>2</sup>, WANG Yintang<sup>2</sup> (1. School of Earth Sciences and Engineering, Hohai University, Nanjing 211100, China; 2. State Key Laboratory of Hydrology-Water Resources and Hydraulic Engineering, Nanjing Hydraulic Research Institute, Nanjing 210029, China)

**Abstract:** In order to verify the validity of the precipitation spatial variogram based on fast Fourier transform, a variogram based on traditional and fast Fourier transformation methods was introduced. Taking a certain region in Huaihe River Basin as an example, the calculation results based on the fast Fourier transformation method are verified on three time scales: year, month and day. The results show that the spatial variation function of precipitation obtained by this method can effectively reflect the spatial anisotropy of precipitation at different time scales

**Key words:** precipitation; variogram; fast Fourier transformation; Huaihe River Basin

降水是最基本的气象水文要素之一,受大气运动状态和地理环境因素的共同影响,降水具有复杂的多尺度空间变异性。深入解析降水空间变异性是科学认识降水时空演化规律并定量估计降水空间分布的重要基础<sup>[1-3]</sup>。降水空间变异性除通过等值线等方式直接展现外,更主要的是采用不均匀指数、空间相关系数、信息熵、经验正交函数分解(empirical or thogonal function, EOF)等统计指标或方法加以分析<sup>[4]</sup>。如李邦东等<sup>[5]</sup>采用不均匀指数(变差系数)分析了我国东北地区1961—2010年降水事件,发现在1993年后该地区降水空间不均匀性增加,在一定程度上增加了区域旱涝风险;胡庆芳等<sup>[6]</sup>采用Moran指数等6种全局或局部空间相关性指标分析了赣江流域降水空间变异性,得出年、月、日降水量整体上呈显著时变空间正相关性,但在局部上具有

非平稳性和奇异性的结论;张继国等<sup>[7]</sup>基于信息熵传输模型,解析了淮河流域年降水在东西方向相关性强、南北方向弱的空间结构特征;徐利岗等<sup>[8]</sup>基于EOF发现我国北方荒漠区降水总体表现为“相间复杂”和“东西相反”两种空间结构形态;方国华等<sup>[9]</sup>采用降水质心时间为评价指标,研究了淮河流域降水结构的时空演变规律。

在描述降水空间变异性的众多方法或指标中,空间变异函数(或变方差函数)应用较为广泛<sup>[10-12]</sup>。空间变异函数的计算方法有两种:传统方法(基于某种理论变异函数的参数拟合方法)和基于快速傅里叶变换(fast Fourier transformation, FFT)的计算方法<sup>[13-15]</sup>。前者作为传统的计算方法,需要选择特定模型,针对实测数据得到的经验半方差函数进行参数拟合,且一般只能得到特定方向的变异函数值;而

基金项目:国家重点研发计划(2016YFC0400902);国家自然科学基金(51479118,51979073)

作者简介:陈紫阳(1994—),男,硕士研究生,研究方向为降水空间插值。E-mail: czy\_hhu@163.com

通信作者:胡庆芳,高级工程师。E-mail: hqf\_work@163.com

后者则不需要进行参数拟合,能够直接提供二维矩阵形式的变异函数计算结果,可以反映任意方向上的降水空间变异性,这是相对传统方法的突出优点。

基于 FFT 的降水空间变异函数计算方法(以下简称“FFT 方法”)在降水空间变异分析和定量估计中已得到应用,如 Velasco-Forero 等<sup>[16]</sup>采用 FFT 方法计算了西班牙 Catalonia 地区 6 场降雨的变异函数,并应用于降水空间插值中;Cecinati<sup>[17]</sup>则将该方法应用于英国雷达-雨量计降水联合估计中。但总的来说,关于该方法的研究仍然很不充分,本文以淮河中上游某区域为例,开展基于 FFT 方法的有效性研究,并与传统的空间变异函数计算方法进行比较,在不同时间尺度上对 FFT 方法的有效性加以验证。

## 1 空间变异函数计算方法

### 1.1 传统方法

空间变异函数是地质统计学中用于衡量区域化变量在不同位置差异性的统计指标<sup>[18-19]</sup>。对于区域化变量  $Z(x_i)$  和某一空间分离距离  $h$ ,若  $Z(x_i)$  均存在且不取决于空间位置  $x_i$ ,同时对于任意  $x_i$  和  $h$ , $Z(x_i+h) - Z(x_i)$  的方差存在,且不取决于  $x_i$ ,则  $Z(x_i)$  的空间变异函数可表达为

$$\gamma(h) = V[Z(x_i+h) - Z(x_i)]/2 = E\{[Z(x_i+h) - Z(x_i)]^2\}/2 \quad (1)$$

式中: $V$  为方差; $E$  为均值。显然,若  $Z(x_i)$  呈空间正相关,则  $|h|$  越大,变异函数值  $\gamma(h)$  越大;反之, $\gamma(h)$  越小。在  $Z(x_i)$  满足二阶平稳条件的情况下,变异函数与协方差函数以及空间相关系数存在以下转换关系:

$$\gamma(h) = \sigma^2 - C(h) = \sigma^2[1 - \rho(h)] \quad (2)$$

式中: $C(h)$  为协方差函数; $\rho(h)$  为空间自相关系数; $\sigma^2$  为方差。

传统的空间变异函数计算主要包括以下两个步骤:

a. 根据分离距离为  $h$  的样本数据对,采用下式计算经验变异函数值:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2P_h} \sum_{x=1}^{P_h} [Z(x_i+h) - Z(x_i)]^2 \quad (3)$$

式中  $P_h$  为分离距离为  $h$  的样本数据对的数量。

b. 选择满足正定性要求的有效变异函数模型对经验变异函数值进行参数拟合,得到理论变异函数。常用的理论变异函数模型主要有球状模型、指数模型和高斯模型等。以高斯模型为例,其对应的变异函数表达式为

$$\gamma(h) = C_0 + C_1[1 - e^{-(h/a)^2}] \quad (4)$$

式中: $a$  为变程,反映区域化变量的相关尺度; $C_0$  为块金值,反映极短分离距离之间变异函数的不连续性; $C_1$  为变异系数,反映区域化变量变化速率的大小。 $a$ 、 $C_0$ 、 $C_1$  为高斯模型的参数。

由于区域化变量在不同方向可能会具有不同的结构性和变异性(即空间各向异性),故为全面了解区域化变量的空间分布特性,需要对不同方向分别计算空间变异函数,同时还需要根据各向异性的具体性质,对不同方向上的变异函数进行拟合,这正是采用传统方法较为麻烦之处。

### 1.2 FFT 方法

与传统方法不同,FFT 方法不需要针对各个方向采用特定模型对经验变异函数值进行拟合,它是一种非参数计算方法。这种方法首先计算出区域化变量的协方差矩阵,然后用 FFT 将协方差矩阵转换到频域进行处理,最后再通过快速傅里叶逆变换(inverse fast Fourier transform,IFFT)将协方差函数变换回时域,最后利用变异函数和协方差函数之间的转换关系得到二维矩阵形式的空间变异函数。

FFT 方法的具体步骤如下:

a. 首先根据样本数据的空间分布特征,将研究区域划分成一系列矩形格网,格网横向和纵向的分辨率分别为  $x_y$ 。各格网中区域化变量的数值为分布在格网中的采样点的均值,分离距离  $h = (mx, ny)$  ( $m$ 、 $n$  为格网相对平移行列数, $m$ 、 $n$  可为负数)。为方便计算,格网行列数  $m$ 、 $n$  取  $2^k + 1$  ( $k > 2$ )。

b. 采用下式计算分离距离  $h$  对应的协方差函数值  $C(h)$ :

$$C(h) = \frac{1}{P_h} \left[ \sum_{i=1}^{P_h} Z(x_i)Z(x_i+h) - \sum_{i=1}^{P_h} Z(x_i) \sum_{i=1}^{P_h} Z(x_i+h) \right] \quad (5)$$

由于采样点数量有限,因此并非研究区域内的所有格网均是有数据的,这导致可能没有样本数据对用于计算某些  $h$  对应的协方差函数值,因此在用 FFT 进行变换之前要将协方差函数进行初步插值,本文采用下式进行计算:

$$C_{mn} = \sum_{i=1}^P \lambda_i C_i \quad (6)$$

其中

$$\lambda_i = \frac{p_i}{d_i} / \sum_{i=1}^P \frac{p_i}{d_i}$$

式中: $C_{mn}$  为待插值点的协方差值; $m$ 、 $n$  为所在行列数; $P$  为参与插值的点的数量; $\lambda_i$  为插值权重; $C_i$  为插值点的协方差值; $p_i$  为计算相应格网协方差函数值所采用的样本数据对数量; $d_i$  为插值格网与待插

值格网间的距离。由于区域化变量常具有各向异性,因此在对协方差函数插值时需要考虑方向。首先连接中心点与待插值格网,然后在其连线左右一定容差角度范围内,筛选出与待插值格网相距较近的插值点,最后根据这些距离待插值点较近点的协方差函数值即可拟合出待插值格网的协方差函数值。

c. 采用下式所示的 FFT 将协方差矩阵从时域转换到频域:

$$S_{mn} = \sum_{m_1=0}^{M-1} \sum_{n_1=0}^{N-1} C_{m_1 n_1} \exp \left[ -2\pi i \left( \frac{mm_1}{M} + \frac{nn_1}{N} \right) \right] \quad (7)$$

$(m = 0, 1, \dots, M-1; n = 0, 1, \dots, N-1)$

式中: $M$ 、 $N$  为协方差矩阵的行数和列数; $S_{mn}$  为频域中第  $m$  行、第  $n$  列的频谱值。为保证正定性条件,采用式(7)获得频谱图后需要用式(8)所示的移动窗口平滑算法对各个频谱值进行优化,逐步加大窗口宽度直到每个频谱值为非负。如果窗口太大而频谱值仍然为负,则可以直接将所有频谱值加上所有值中最小值的绝对值(最小值太小会使整个频谱基数变大从而使最终的变异函数变化平缓)或者直接将此结果设置为 0 来进行校正。

$$\hat{S}_{mn} = \frac{\sum_{m_2=-M_1/2}^{M_1/2} \sum_{n_2=-N_1/2}^{N_1/2} S_{(m+m_2)(n+n_2)}}{(M_1+1)(N_1+1)} \quad (8)$$

式中: $\hat{S}_{mn}$  为平滑后的频谱值; $M_1$ 、 $N_1$  为平滑窗口的大小, $M_1$ 、 $N_1$  须为偶数。

d. 采用式(9)的 IFFT 将  $S_{mn}$  转换回时域,在协方差函数矩阵的基础上,根据式(2)得到优化后的变异函数矩阵。

$$C_{mn} = \frac{1}{MN} \sum_{m_1=0}^{M-1} \sum_{n_1=0}^{N-1} S_{m_1 n_1} \exp \left[ 2\pi i \left( \frac{mm_1}{M} + \frac{nn_1}{N} \right) \right] \quad (9)$$

$(m = 0, 1, \dots, M-1; n = 0, 1, \dots, N-1)$

## 2 研究区域与数据

选择淮河流域中上游一长宽均为 170 km 的方形研究区域(图 1)来验证 FFT 方法计算结果的合理性。研究区域位于安徽省阜阳附近(东经  $115^{\circ}10' \sim 116^{\circ}51'$ ,北纬  $32^{\circ}8' \sim 33^{\circ}41'$ ),地跨淮河干流两岸,属于我国南北过渡带,高程介于  $-11 \sim 409$  m,多年平均降水量为  $900 \sim 1000$  mm。

研究区域内共有雨量站 127 个,面积约  $28900 \text{ km}^2$ ,站点密度约为  $230 \text{ km}^2$  一个。研究数据为从《淮河流域水文年鉴》中收集的 127 个站点 2010—2015 年连续的年、月、日降水数据,降水数据经过了严格的质量控制。

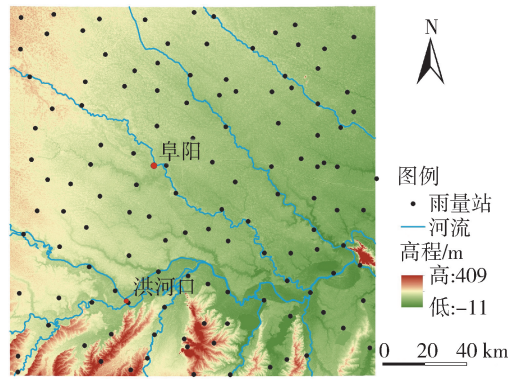


图 1 研究区域与雨量站点分布

Fig. 1 Study area and rainfall sites distribution

## 3 结果分析与讨论

根据研究区域内 2010—2015 年的降水数据,采用 FFT 方法计算了年、月、日 3 种时间尺度上的降水空间变异函数,从东-西(E-W)、东南-西北(SE-NW)、南-北(S-N)、西南-东北(SW-NE)4 个方向比较了 FFT 方法与传统方法的差异。

### 3.1 年降水量空间变异函数

图 2 为 FFT 方法计算得到的研究区域年降水量(2012 年)的空间变异函数(为二维矩阵,图中每个像元的大小为  $10 \text{ km} \times 10 \text{ km}$ ,图像大小为  $330 \text{ km} \times 330 \text{ km}$ ,以向 E、N 为正,向 W、S 为负,图像中心处表示分离距离为 0 的变异函数值,其他各位置表示不同分离距离和方向上的变异函数值)。显然,空间变异函数矩阵具有中心对称性,研究区域年降水量在空间上呈现出不同程度、不同特点的带状各向异性。对于 2012 年年降水量,其在 SE-NW 方向空间变异较快,而在 SW-NE 方向的变异相对较慢。从图 2 还可发现,变异函数的块金值约为  $1800 \text{ mm}^2$ ,基台值大致为  $18000 \text{ mm}^2$ ,变程为  $80 \text{ km}$ 。在变程范围内,年降水量是结构性和随机性的统一体。随着分离距离的不断增加,年降水量的空间结构性逐步降低、随机性不断增强。

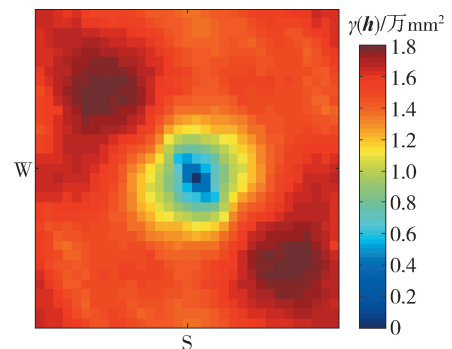


图 2 FFT 方法计算的年降水量空间变异函数

Fig. 2 Spatial variogram of annual precipitation by FFT

图 3 为两种方法计算的年降水量(2012 年)空

间变异函数对比(为对比两种方法的差异性,图中也给出了采用经验变异函数直接计算得到的散点值),其中传统方法采用了多种模型进行拟合,最终选取了拟合效果最好的球形模型。总体而言,传统方法计算结果与经验变异函数计算值更为接近,且传统方法和 FFT 方法所得结果在多数情况下具有相近变化特征,如 E-W 方向两种方法所得年降水量空间变异函数值就很接近。

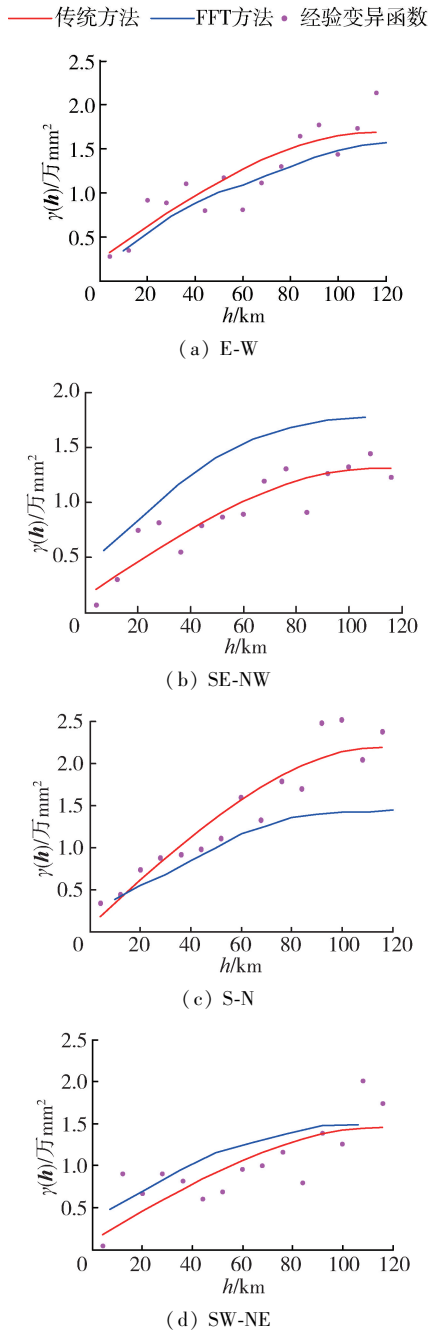


图3 两种方法计算的年降水量空间变异函数对比

Fig.3 Comparison of annual precipitation spatial variogram based on two calculation methods

### 3.2 月降水量空间变异函数

图4为FFT方法计算的月降水量(2012年9月)空间变异函数。由图4可知,研究区域内月降

水量的空间带状各向异性特征也很明显。月降水量在E-W和S-N方向变化慢,在SE-NW和SW-NE方向变化慢。从图4还可以看出月降水量空间变异函数的块金值约为100 mm<sup>2</sup>,基台值大致为1800 mm<sup>2</sup>,S-N方向变程约为100 km,E-W方向变程约为80 km。与年降水量相似,随着分离距离的增加,月降水量的半方差函数值不断增大,随机性不断增强;直至分离距离达到和超过变程后,月降水量的半方差函数值趋于方差值。

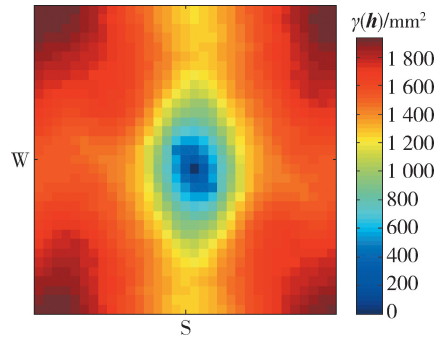


图4 FFT方法计算的月降水量空间变异函数

Fig.4 Spatial variogram of monthly precipitation by FFT

图5为两种方法计算的月降水量(2012年9月)空间变异函数对比,其中传统方法选取了拟合效果最好的高斯模型。总体而言,其规律与年降水量类似,传统拟合方法计算结果与经验变异函数计算值更为接近,但传统方法和FFT方法所得结果在多数情况下具有相近的变化特征。

### 3.3 日降水量空间变异函数

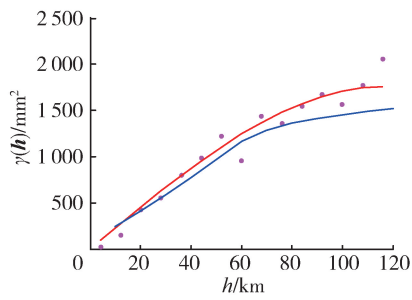
图6为FFT方法计算的日降水量(2015年6月25日)空间变异函数。由图6可知,日降水量在S-N方向变异较慢,E-W方向变异快,但即便如此仍有一定差异。日降水量空间变异函数的块金值约为2 mm<sup>2</sup>,基台值大致为50 mm<sup>2</sup>,S-N方向变程约为110 km,E-W方向变程约为80 km。

图7给出了两种方法计算的日降水量(2015年6月25日)空间变异函数值对比,其中传统方法选取了拟合效果最好的指数模型。FFT方法所得日降水量空间变异函数在长距离上的表现没有传统方法效果好,但在短距离上两者所得结果较为接近。

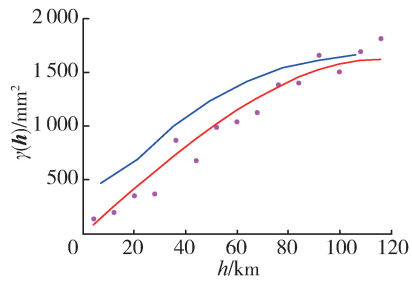
## 4 结语

本文在介绍空间变异函数计算方法的基础上,以淮河中上游某区域为例,通过与传统方法的比较,在年、月、日时间尺度上对FFT方法的计算结果进行了验证。在年、月时间尺度上,FFT方法和传统方法所得降水空间变异函数具有相近变化特征,而在日时间尺度上,两者在短距离上所得结果也较为接近。

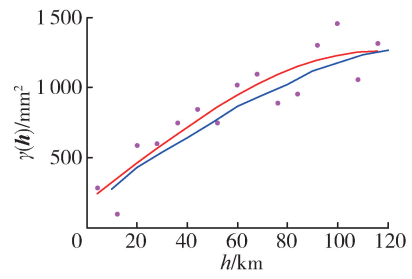
— 传统方法 — FFT方法 · 经验变异函数



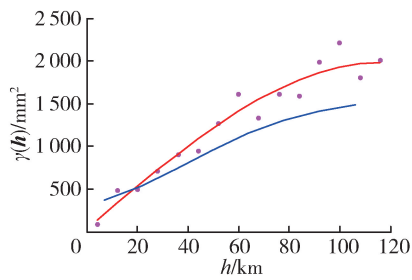
(a) E-W



(b) SE-NW



(c) S-N



(d) SW-NE

图5 两种方法计算的月降水量空间变异函数对比  
Fig.5 Comparison of monthly precipitation spatial variogram based on two calculation methods

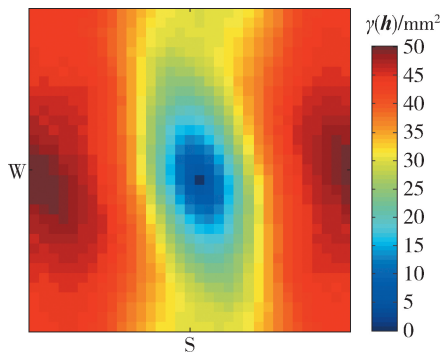
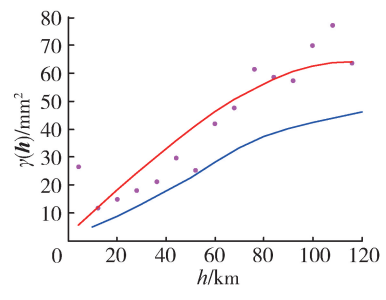
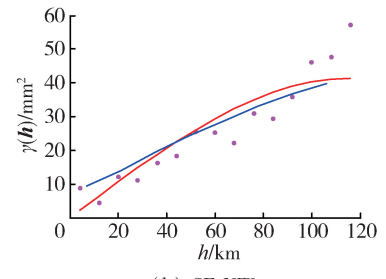


图6 FFT方法计算的日降水量空间变异函数  
Fig.6 Spatial variogram of daily precipitation by FFT

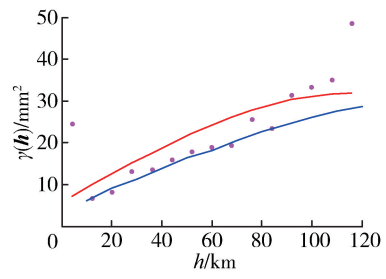
— 传统方法 — FFT方法 · 经验变异函数



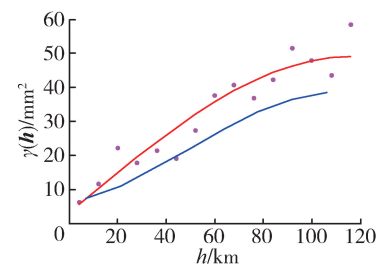
(a) E-W



(b) SE-NW



(c) S-N



(d) SW-NE

图7 两种方法计算的日降水量空间变异函数对比

Fig.7 Comparison of daily precipitation spatial variogram based on two calculation methods

本文的研究证实了 FFT 方法在细致解析降水空间结构特征上的价值,下一步将运用该方法开展降水空间定量估计的研究,并比较不同降水空间变异函数计算方法对降水定量估计结果的影响。

#### 参考文献:

- [ 1 ] 陈汉清,鹿德凯,周泽慧,等. GPM 降水产品评估研究综述 [J]. 水资源保护, 2019, 35 (1) : 27-34. (CHEN Hanqing, LU Dekai, ZHOU Zehui, et al. An overview of assessments on global precipitation measurement (GPM) precipitation products [J]. Water Resources Protection, 2019, 35 (1) : 27-34. (in Chinese))

- [ 2 ] 任国玉,王涛,郭军,等.海河流域近现代降水量变化若干特征[J].水利水电科技进展,2015,35(5):103-111. (REN Guoyu,WANG Tao,GUO Jun,et al.Characteristics of precipitation variations in Haihe River Basin in modern times[J].Advances in Science and Technology of Water Resources,2015,35(5):103-111.(in Chinese))
- [ 3 ] 高冰,任依清.鄱阳湖流域1961—2010年极端降水变化分析[J].水利水电科技进展,2016,36(1):31-35. (GAO Bing,REN Yiqing.Changes of extreme precipitation events in Poyang Lake Basin from 1961 to 2010[J].Advances in Science and Technology of Water Resources,2016,36(1):31-35.(in Chinese))
- [ 4 ] 荣艳淑,石丹丹,吕星明,等.拉尼娜事件对长江中下游旱涝的影响[J].水资源保护,2019,35(3):14-24. (RONG Yanshu,SHI Dandan,LYU Xingyue,et al.Influence of La Niña events on drought and flood in middle and lower reaches of Yangtze River[J].Water Resources Protection,2019,35(3):14-24.(in Chinese))
- [ 5 ] 李邦东,赵中军,舒黎忠,等.1961—2010年东北地区降水事件时空均匀性研究[J].气象与环境学,2014,30(3):52-58. (LI Bangdong,ZHAO Zhongjun,SHU Lizhong,et al.Spatial and temporal homogeneity of precipitation events from 1961 to 2010 in northeast China [J].Journal of Meteorology and Environment,2014,30(3):52-58.(in Chinese))
- [ 6 ] 胡庆芳,杨大文,王银堂,等.利用全局与局部相关函数分析流域降水空间变异性[J].清华大学学报(自然科学版),2012,52(6):778-784. (HU Qingfang,YANG Dawen,WANG Yintang,et al.Rainfall spatial variation models using global and local spatial correlation functions [J].Journal of Tsinghua University (Science and Technology),2012,52(6):778-784.(in Chinese))
- [ 7 ] 张继国,刘新仁.降水时空分布不均匀性的信息熵分析(II):模型评价与应用[J].水科学进展,2000,11(2):138-143. (ZHANG Jiguo,LIU Xinren.Information entropy analysis on nonuniformity of precipitation distribution in time-space(II):model evaluation and application [J].Advances in Water Science,2000,11(2):138-143.(in Chinese))
- [ 8 ] 徐利岗,梁川,周宏飞,等.中国北方荒漠区降水空间结构型及变异性研究[J].中国沙漠,2010,30(6):1433-1441. (XU Ligang,LIANG Chuan,ZHOU Hongfei,et al.Spatial structural patterns and variability of precipitation over the desert region of Northern China [J].Journal of Desert Research,2010,30(6):1433-1441.(in Chinese))
- [ 9 ] 方国华,张钰,闻昕,等.基于质心分析的淮河流域降水时空分布特征[J].河海大学学报(自然科学版),2018,46(5):384-389. (FANG Guohua,ZHANG Yu,WEN Xin,et al.Spatial and temporal distribution characteristic of precipitation in the Huaihe River Basin based on centroid analysis [J].Journal of Hohai University (Natural Sciences),2018,46(5):384-389.(in Chinese))
- [ 10 ] 李丽娟,王娟,李海滨.无定河流域降雨量空间变异性研究[J].地理研究,2002(4):434-440. (LI Lijuan,WANG Juan,LI Haibin.Analysis of the spatial variability of rainfall in Wuding River Basin [J].Geographical Research,2002(4):434-440.(in Chinese))
- [ 11 ] 蒋艳,周成虎,程维明.新疆阿克苏河流域降水空间变异特征分析[J].地球信息科学学报,2006,8(1):131-138. (JIANG Yan,ZHOU Chenghu,CHENG Weiming.Research on the spatial variability of rainfall in Akesu River Basin [J].Geo-Information Science,2006,8(1):131-138.(in Chinese))
- [ 12 ] 王军,傅伯杰,邱扬,等.黄土丘陵小流域土壤水分的时空变异特征:半变异函数[J].地理学报,2000,55(4):428-438. (WANG Jun,FU Bojie,QIU Yang,et al.Spatiotemporal variability of soil moisture in small catchment on Loess Plateau: semivariograms [J].Acta Geographica Sinica,2000,55(4):428-438.(in Chinese))
- [ 13 ] MARCOTTE D. Fast variogram computation with FFT [J]. Computers & Geosciences,1996,22(10):1175-1186.
- [ 14 ] YAO T, JOURNEL A G. Automatic modeling of (cross) covariance tables using fast fourier transform [J]. Mathematical Geology,1998,30(6):589-615.
- [ 15 ] MA X, YAO T. A program for 2D modeling (cross) correlogram tables using fast Fourier transform [J]. Computers & Geosciences,2001,27(7):763-774.
- [ 16 ] VELASCO-FORERO C A, SEMPERE-TORRES D, CASSIRAGA E F, et al. A non-parametric automatic blending methodology to estimate rainfall fields from rain gauge and radar data [J]. Advances in Water Resources, 2009,32(7):986-1002.
- [ 17 ] CECINATI F. Uncertainty estimation and propagation in radar-rain gauge rainfall merging using kriging-based techniques [D]. Bristol:University of Bristol,2017.
- [ 18 ] 张仁铎.空间变异理论及应用[M].北京:科学出版社,2005.
- [ 19 ] 李超.土壤水分的空间变异特性分析和农田干旱评估 [D].北京:清华大学,2009.

(收稿日期:2019-04-21 编辑:熊水斌)

