

DOI:10.3880/j.issn.1004-6933.2021.06.006

基于 TL 矩法的洪水频率分布参数估计方法优选

贾一凡^{1,2}, 宋松柏^{1,2}

(1. 西北农林科技大学水利与建筑工程学院, 陕西 杨凌 712100;

2. 西北农林科技大学旱区农业水土工程教育部重点实验室, 陕西 杨凌 712100)

摘要:为分析 TL 矩法在洪水频率分析中的普适性, 以陕北地区神木、绥德、杏河、刘家河、黄陵和志丹 6 个水文站的年最大洪峰流量序列为例, 选取广义 Pareto 分布、广义极值分布和广义 Logistic 分布, 对线性矩法、极大似然法与 TL 矩法 3 种参数估计方法进行拟合优度评估。结果表明:除杏河站用广义极值分布外, 其他 5 个水文站的年最大洪峰流量序列用广义 Pareto 分布拟合效果更佳; 与线性矩法和极大似然法相比, TL 矩法在各水文站均表现出更佳的拟合效果, 是一种洪水频率分布参数估计的较好方法。

关键词:TL 矩法; 线性矩法; 极大似然法; 洪水频率分析; 参数估计

中图分类号:P333.2 **文献标志码:**A **文章编号:**1004-6933(2021)06-0034-06

Optimization of flood frequency distribution parameter estimation method based on TL-moments // JIA Yifan^{1,2}, SONG Songbai^{1,2} (1. College of Water Resources and Architectural Engineering, Northwest A&F University, Yangling 712100, China; 2. Key Laboratory for Agricultural Soil and Water Engineering in Arid Area of Ministry of Education, Northwest A&F University, Yangling 712100, China)

Abstract: To study the universality of applying TL-moments method to flood frequency distribution analysis, we took the annual maximum stream flow series at six stations in Shenmu, Suide, Xinghe, Liujiahe, Huangling and Zhidan in northern Shaanxi Province as examples, and selected generalized Pareto distribution, generalized extreme value distribution and generalized Logistic distribution to evaluate the fitting effect of the 3 parameter estimation methods, namely L-moments method, maximum likelihood method and TL-moments method. The results show that, while Xinghe station's annual maximum stream flow series are better described with generalized extreme value distribution, generalized Pareto distribution fits the flow series of the other five stations more accurately. Compared with L-moments method and maximum likelihood method, TL-moments method shows a better fitting effect at each station, which is a better way to estimate the distribution parameters of flood frequency.

Key words: TL-moments method; L-moments method; maximum likelihood method; frequency analysis of flood; parameter estimation

洪水是最常见的自然灾害之一, 利用有限的水文观测资料发掘洪水规律, 并据此制定相应的预防措施可以避免或减少不必要的损失^[1]。洪水频率分析通过选定的频率分布来估计洪水特征值, 预测未来事件的发生概率。洪水频率分布参数的合理估计, 直接影响洪水设计值计算的合理性。由于气候变化及人类活动的影响, 洪水的驱动机制及发生规律等出现了显著的变化, 针对这些变化, 近年来国内外学者不断开展洪水频率分析的不确定性研究, 以

提高洪水预报精度^[2-5]。

洪水频率分析的关键步骤为频率分布线型及参数估计方法的选择, 它们决定了拟合的效果^[6]。目前较为广泛使用的频率分布有 P-Ⅲ分布、对数 P-Ⅲ分布、广义 Pareto 分布 (GPA)、广义极值分布 (GEV)、广义 Logistic 分布 (GLO) 和 Gamma 分布等。常用的参数估计方法有矩法 (MOM)、线性矩法 (LM)、极大似然法 (MLE)、适线法及概率权重矩法 (PWMM) 等^[7], 这些方法各有优缺点, 在不同实例

基金项目: 国家自然科学基金 (52079110)

作者简介: 贾一凡 (1999—), 女, 硕士研究生, 研究方向为流域水文模拟。E-mail: jyfl897441@163.com

通信作者: 宋松柏 (1965—), 男, 教授, 博士, 主要从事流域水文模拟与水文预报研究。E-mail: ssb6533@nwsuaf.edu.cn

中应用时会产生较大差异^[8]。极大似然法估计的参数是渐近有效和无偏的,因此优于矩法^[9],但它求解过程烦琐。传统矩法采用样本矩代替总体矩,原理简单,实际应用方便,但是偏态系数会产生较大误差,导致该方法不能轻易作为单独的估计方法来使用^[10],通常与其他方法参照应用^[11]。相比传统矩法,线性矩法受样本变异性的影响较小,具有良好的不偏性。同时,对于数据中的异常值,线性矩法比传统矩法更加稳健,并且能从小样本中推断可能的概率分布^[12],但该方法的缺点是对水文极值序列中极大值和极小值反应不敏感。

在线性矩法的基础上,进行大幅度修改的 TL 矩法(TLM)^[13]于 2003 年被提出,该方法对极端观测值分配零权重,消除了小样本序列中零值产生的不利影响。从总体线性矩的意义上来说,在 TL 矩中,概念样本次序统计量的期望被较大样本次序统计量的期望所代替,其增加的样本数量等于修正的总量,所以 TL 矩相比线性矩和传统矩具有一定的优势^[14]。从 TL 矩法提出至今,国外学者解决了该方法的实际应用问题。Ahmad 等^[15]对 GPA、GEV、GLO 分布的 TL 矩法(修正量 $t_1 = 1, t_2 = 0$)参数估计式进行了推导。Mat 等^[16]整理计算出了三参数对数正态分布和 P-III 分布的 TL 矩,其中修正量 $t_1 = 1, 2, 3, 4$ 。TL 矩法在实际应用中存在修正量的选择问题,Ahmad 等^[17]研究表明,与 TL 矩法和线性矩法相比,仅调整最小值的 TL 矩法(修正量 $t_1 = 1, t_2 = 0$)在估计高流量分位数方面具有更高的精度,它能够减少小样本值的不利影响。由于 TL 矩法的优越性,TL 矩法逐渐应用于洪水频率分布参数估计^[18-25]。

线性矩法是使用较为成熟的一种参数估计方法,在洪水频率分析中应用广泛,而基于线性矩法发展起来的 TL 矩法在一些研究中表现出较好的拟合效果。目前,我国还缺乏该方法的普适性研究。本文以陕北地区神木、绥德、杏河、刘家河、黄陵和志丹 6 个水文站的年最大洪峰流量序列为例,选取常用的 3 个三参数分布(GPA、GEV、GLO),分别用极大似然法、线性矩法及 TL 矩法进行参数估计,采用确定性系数(R^2)和均方根误差(RMSE)进行分布线型及参数估计方法优选^[26]。

1 3 种概率分布参数的 TL 矩法估计

Hosking^[12]将线性矩定义为概率权重矩的线性组合。假设随机变量 X 是样本容量为 r 的样本, $X_{1,r} \leq X_{2,r} \leq \dots \leq X_{r,r}$ 表示相应的次序统计量,其定义的线性矩为

$$\lambda_r = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} E(X_{r-k,r}) \quad (1)$$

式中 $E(X_{r-k,r})$ 为容量为 r 的样本中第 $r-k$ 位的次序统计量的期望值。

L-偏态系数和 L-峰度系数为

$$\tau_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \quad \tau_4 = \frac{\lambda_4}{\lambda_2} \quad (2)$$

从样本次序统计量 $X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$ 中估算样本线性矩^[18]:

$$l_r = \frac{1}{r \binom{n}{r}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \binom{r-1}{j} \binom{i-1}{r-1-j} \binom{n-j}{j} X_{i,n} \quad (3)$$

式中 n 为样本容量。

Elamir 等^[13]提出的 TL 矩法在线性矩法的基础上进行了大幅度的修改,将样本容量 r 替换为 $r + t_1 + t_2$,其中增加的样本数量为 t_1 个概念样本中的最小值与 t_2 个概念样本中的最大值个数之和。因此,式(1)中的 $E(X_{r-k,r})$ 替换为 $E(X_{r+t_1-k,r+t_1+t_2})$ 。在 TL 矩法的研究中,主要问题是修正量 t_1 和 t_2 的选择,经过经验及理论验证,样本中较小的值会影响高分位数估计时的准确性,因此仅修正最小值即 $t_2 = 0$ 时就可以得到准确的结果。研究^[15,27-28]表明,修正量 $t_1 = 1, t_2 = 0$ 时 TL 矩法能得到更好的参数估计结果,因此本文取 $t_1 = 1, t_2 = 0$ 。

将 r 阶的 TL 矩定义为

$$\lambda_r^{(t_1, t_2)} = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} E(X_{r+t_1-k,r+t_1+t_2}) \quad (4)$$

取 $t_1 = 1, t_2 = 0$,得到前 4 阶 TL 矩:

$$\lambda_1^{(1,0)} = E(X_{2,2}) \quad (5)$$

$$\lambda_2^{(1,0)} = \frac{1}{2} E(X_{3,3} - X_{2,3}) \quad (6)$$

$$\lambda_3^{(1,0)} = \frac{1}{3} E(X_{4,4} - 2X_{3,4} + X_{2,4}) \quad (7)$$

$$\lambda_4^{(1,0)} = \frac{1}{4} E(X_{5,5} - 3X_{4,5} + 3X_{3,5} - X_{2,5}) \quad (8)$$

则 TL-偏态系数 $\tau_3^{(1,0)}$ 和 TL-峰度系数 $\tau_4^{(1,0)}$ 的计算公式为

$$\tau_3^{(1,0)} = \frac{\lambda_3^{(1,0)}}{\lambda_2^{(1,0)}} \quad \tau_4^{(1,0)} = \frac{\lambda_4^{(1,0)}}{\lambda_2^{(1,0)}} \quad (9)$$

从样本次序统计量 $X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$ 中估算样本 TL 矩:

$$l_r^{(1,0)} = \frac{1}{r \binom{n}{r+1}} \sum_{i=2}^n \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} \binom{i-1}{r-k} \binom{n-i}{k} X_{i,n} \quad (10)$$

样本 TL-偏态系数与样本 TL-峰度系数计算公式为

$$t_3^{(1,0)} = \frac{l_3^{(1,0)}}{l_2^{(1,0)}} \quad t_4^{(1,0)} = \frac{l_4^{(1,0)}}{l_2^{(1,0)}} \quad (11)$$

a. GPA 分布参数的 TL 矩法估计。GPA 分布的分位数函数为

$$X(F) = \xi + \frac{\alpha}{k} [1 - (1 - F)^k] \quad (12)$$

对应 TL 矩法参数估计式^[29]为

$$\alpha = \frac{l_2(k+1)(k+2)(k+3)}{3} \quad (13)$$

$$\xi = l_1 - \alpha \left[\frac{k+3}{(k+1)(k+2)} \right] \quad (14)$$

$$k = \frac{4 - 12t_3}{4 + 3t_3} \quad (15)$$

b. GEV 分布参数的 TL 矩法估计。GEV 分布的分位数函数为

$$X(F) = \begin{cases} \xi + \frac{\alpha}{k} [1 - (-\ln F)^k] & k \neq 0 \\ \xi - \alpha \ln(-\ln F) & k = 0 \end{cases} \quad (16)$$

对应 TL 矩法参数估计式^[15]为

$$\alpha = \frac{-2 \times 6^k l_2}{3\Gamma(k)(2^k - 3^k)} \quad (17)$$

$$\xi = l_1 - \frac{\alpha}{k} + \frac{\alpha\Gamma(k)}{2^k} \quad (18)$$

$$k = 0.49 - 2.08t_3 + 0.61t_3^2 - 0.60t_3^3 + 0.48t_3^4 \quad (19)$$

c. GLO 分布参数的 TL 矩法估计。GLO 分布的分位数函数为

$$X(F) = \xi + \frac{\alpha}{k} \left[1 - \left(\frac{1-F}{F} \right)^k \right] \quad (20)$$

对应 TL 矩法参数估计式^[17]为

$$\alpha = \frac{4kl_2}{6\Gamma(2-k)\Gamma(1+k) - 3\Gamma(3-k)\Gamma(k+1)} \quad (21)$$

$$\xi = l_1 - \frac{\alpha}{k} + \frac{\alpha\Gamma(2-k)\Gamma(k+1)}{k} \quad (22)$$

$$k = \frac{4 - 27t_3}{20} \quad (23)$$

2 数据资料

选取陕北地区神木、绥德、杏河、刘家河、黄陵和志丹 6 个水文站的年最大洪峰流量资料,开展基于极大似然法、线性矩法和 TL 矩法的参数估计方法对比研究,进行 GPA、GEV、GLO 3 种三参数分布的曲线拟合,选用确定性系数和 RMSE 准则分

析不同频率分布及不同参数估计方法下的拟合效果。经审查,选用资料满足一致性、可靠性及代表性要求,可用于计算。具体资料系列长度如表 1 所示。

表 1 洪水资料系列长度

Table 1 Lengths of stream flow series

水文站	起止年份	序列长度/a
神 木	1956—2003 年	48
绥 德	1960—2003 年	44
杏 河	1980—2003 年	24
刘家河	1959—2003 年	45
黄 陵	1966—2003 年	38
志 丹	1966—2003 年	38

2.1 参数估计及曲线拟合

利用 Matlab 编程,将 GPA、GEV、GLO 3 种三参数分布通过极大似然法、线性矩法及 TL 矩法计算得到 α 、 ξ 和 k 3 个参数值,参数估计结果如表 2 所示。

分析 3 种参数估计方法下的 3 种分布线型对经验点据的拟合情况,绘制频率曲线,以 GPA 分布线型为例,结果如图 1 所示。

从图 1 可以看出,整体上线性矩法与 TL 矩法的拟合效果优于极大似然法,能兼顾到经验点据各部分。神木站和绥德站上尾部分 TL 矩法拟合效果更好,下尾部分拟合效果不及极大似然法与线性矩法;刘家河、黄陵和志丹站线性矩法与 TL 矩法拟合效果相当且优于极大似然法。结合实际来看,洪水频率分析中更为注重上尾部分的拟合,因此 TL 矩法在上尾部分较优的拟合效果更有利于洪水设计值的选定。

2.2 拟合优度评价

确定性系数通常用于判断观测值与设计值的拟合程度,它是频率分布优选的常用指标之一。确定性系数值越接近于 1,表明设计值越接近于实际观测值,即拟合效果越好。各站年最大洪峰流量序列不同参数估计方法确定性系数计算结果如表 3 所示。

从表 3 结果来看,除杏河站之外的其他 5 个水文站 GPA 分布确定性系数值均大于 GEV 分布以及 GLO 分布,依据数值接近 1 的原则,得出神木、绥德、刘家河、黄陵和志丹 5 个水文站选用 GPA 分布来描述更合适,GEV 分布次之。而杏河站 GEV 分布的确定性系数值相比 GPA 分布与 GLO 分布要更接近于 1,选用 GEV 分布拟合效果最优,GLO 分布次之。由于杏河站年最大洪峰流量序列长度远小于其他 5 个水文站,小样本量可能会影响频率分布线型的选择而产生误导性结果,因此认为该区域用

表 2 各水文站年最大洪峰流量序列分布参数估计结果

Table 2 Estimated distribution parameters of annual maximum stream flow at each station

水文站	分布	方法	α	ξ	k	水文站	分布	方法	α	ξ	k
神木	GPA	极大似然法	4 181.057	50.832	0.175	刘家河	GPA	极大似然法	1 796.417	0.990	0.000
		线性矩法	3 621.643	-83.403	-0.019			线性矩法	1 221.676	213.340	-0.205
		TL 矩法	4 783.475	-691.843	0.138			TL 矩法	1 269.577	181.772	-0.188
	GEV	极大似然法	2 694.277	2 002.546	-0.019		GEV	极大似然法	1 185.971	922.992	-0.108
		线性矩法	2 003.945	1 795.002	-0.252			线性矩法	759.634	877.579	-0.370
		TL 矩法	2 862.307	1 591.929	-0.051			TL 矩法	895.050	831.091	-0.298
	GLO	极大似然法	1 820.740	3 215.397	-0.128		GLO	极大似然法	870.239	1 483.576	-0.177
		线性矩法	1 525.721	2 619.460	-0.342			线性矩法	617.047	1 196.042	-0.431
		TL 矩法	2 027.590	2 740.330	-0.175			TL 矩法	720.704	1 204.236	-0.361
绥德	GPA	极大似然法	770.651	86.210	0.220	黄陵	GPA	极大似然法	105.118	0.990	-0.109
		线性矩法	811.040	86.933	0.127			线性矩法	54.735	9.318	-0.341
		TL 矩法	965.794	12.169	0.233			TL 矩法	60.163	5.343	-0.305
	GEV	极大似然法	490.292	524.751	0.002		GEV	极大似然法	68.773	38.644	-0.173
		线性矩法	409.411	491.885	-0.164			线性矩法	37.088	40.087	-0.462
		TL 矩法	548.163	464.328	0.016			TL 矩法	44.531	36.990	-0.393
	GLO	极大似然法	328.791	742.522	-0.117		GLO	极大似然法	53.697	72.196	-0.216
		线性矩法	296.685	657.140	-0.279			线性矩法	31.595	55.755	-0.504
		TL 矩法	375.505	681.604	-0.126			TL 矩法	37.770	55.726	-0.435
杏河	GPA	极大似然法	223.497	109.104	0.326	志丹	GPA	极大似然法	643.093	69.670	0.037
		线性矩法	367.159	43.526	0.568			线性矩法	512.705	114.693	-0.108
		TL 矩法	322.799	60.186	0.464			TL 矩法	503.101	119.932	-0.120
	GEV	极大似然法	136.763	204.990	0.048		GEV	极大似然法	423.959	404.653	-0.308
		线性矩法	140.659	206.606	0.078			线性矩法	300.074	386.774	-0.308
		TL 矩法	160.180	204.118	0.171			TL 矩法	343.711	373.378	-0.244
	GLO	极大似然法	86.377	264.125	-0.094		GLO	极大似然法	304.470	604.280	-0.165
		线性矩法	88.991	259.645	-0.121			线性矩法	235.655	511.471	-0.383
		TL 矩法	101.642	265.768	-0.016			TL 矩法	268.900	515.662	-0.319

○ 经验频率 — 极大似然法 — 线性矩法 — TL矩法

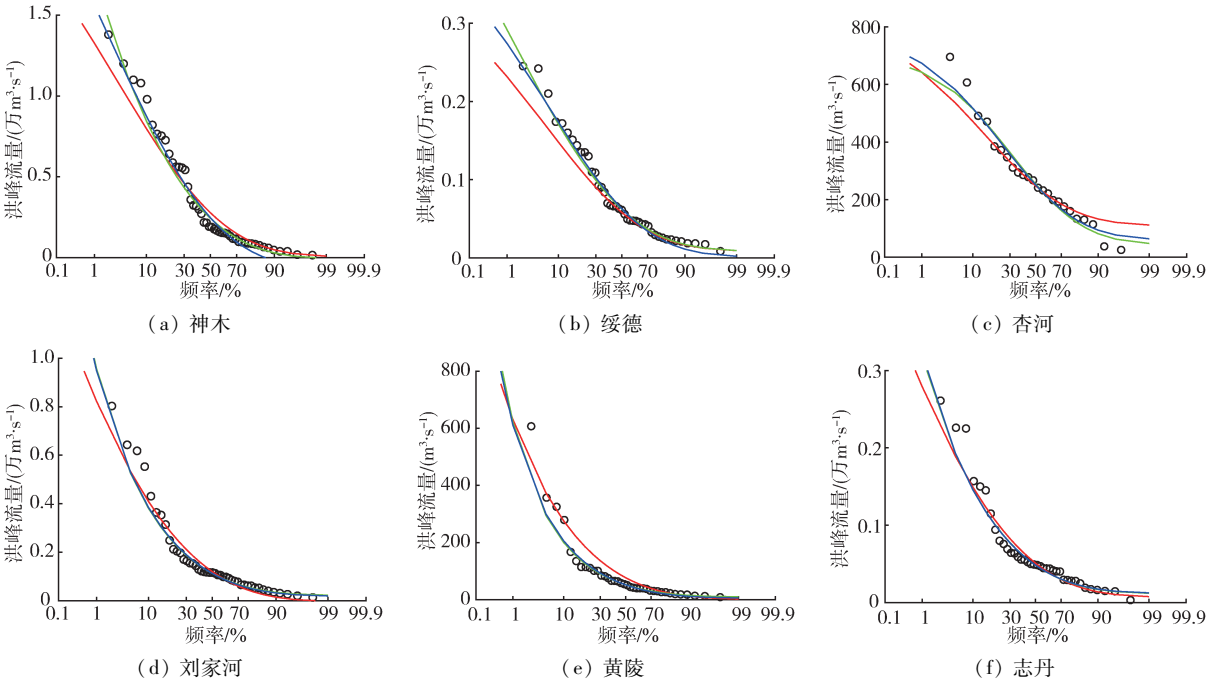


图 1 各水文站年最大洪峰流量 GPA 分布频率曲线

Fig.1 Frequency curves of annual maximum stream flows using GPA distribution at each station

GPA 分布拟合年最大洪峰流量序列较为准确。

2.3 误差分析

选取 RMSE 来定量评价参数估计方法,并进行

参数估计方法优选。RMSE 能衡量观测值与设计值之间的偏差, RMSE 值越小拟合效果越好。各水文站对应 RMSE 值如表 4 所示。

表 3 各水文站年最大洪峰流量序列不同参数估计方法确定性系数

Table 3 Certainty coefficients of annual maximum stream flow under different parameter estimation methods at each station

水文站	不同分布线型和参数估计方法的确定性系数								
	GPA-MLE	GPA-LM	GPA-TLM	GEV-MLE	GEV-LM	GEV-TLM	GLO-MLE	GLO-LM	GLO-TLM
神 木	0.945	0.974	0.980	0.952	0.949	0.969	0.924	0.937	0.960
绥 德	0.917	0.984	0.983	0.959	0.964	0.968	0.935	0.951	0.959
杏 河	0.911	0.952	0.959	0.969	0.968	0.962	0.949	0.963	0.957
刘家河	0.943	0.950	0.952	0.915	0.928	0.937	0.886	0.916	0.926
黄 陵	0.876	0.884	0.889	0.855	0.857	0.871	0.823	0.844	0.860
志 丹	0.933	0.943	0.944	0.913	0.924	0.930	0.884	0.911	0.919

注:GPA-MLE 表示用极大似然法估计 GPA 分布参数,其他同。

表 4 各水文站年最大洪峰流量序列不同参数估计方法 RMSE 值

Table 4 RMSE of annual maximum stream flow under different parameter estimation methods at each station

水文站	不同分布线型和参数估计方法的 RMSE 值/(m ³ ·s ⁻¹)								
	GPA-MLE	GPA-LM	GPA-TLM	GEV-MLE	GEV-LM	GEV-TLM	GLO-MLE	GLO-LM	GLO-TLM
神 木	820.96	564.03	495.65	770.99	792.48	617.26	966.91	880.63	699.72
绥 德	179.10	78.96	81.46	125.60	118.26	111.36	160.81	136.98	125.53
杏 河	48.38	35.49	32.68	28.30	29.15	31.73	36.47	31.19	33.74
刘家河	424.67	396.65	389.96	516.89	476.14	447.03	600.07	514.58	482.44
黄 陵	41.08	39.69	38.87	44.50	44.05	41.94	49.09	46.03	43.71
志 丹	158.10	145.50	144.73	180.66	168.71	162.01	208.58	182.07	174.68

由表 4 结果可知,对 6 个水文站进行频率分析后,极大似然法对应的 RMSE 值均大于线性矩法与 TL 矩法的 RMSE 值,表明极大似然法的拟合效果劣于线性矩法及 TL 矩法。同时,线性矩法与 TL 矩法相比,作为基于线性矩法扩展而来的 TL 矩法,其对应 RMSE 值更小,因此两者相比,TL 矩法优于线性矩法。

3 结 论

a. 选取的 3 种三参数分布中,杏河站用广义极值分布描述更为合理,而广义 Pareto 分布能较好地拟合神木、绥德、刘家河、黄陵和志丹 5 个水文站年最大洪峰流量序列。

b. 线性矩法和 TL 矩法拟合效果优于极大似然法,而线性矩法与 TL 矩法两者相比,TL 矩法表现更优。在对陕北地区的洪水频率分析中,TL 矩法是一种可取的、拟合效果合理的参数估计方法。

参考文献:

[1] 李致家,梁世强,霍文博,等. 淮河上中游复杂流域洪水预报[J]. 河海大学学报(自然科学版),2019,47(1): 1-6. (LI Zhijia, LIANG Shiqiang, HUO Wenbo, et al. Study on the flood forecasting in complex basins of upper and middle reaches of Huaihe River[J]. Journal of Hohai University (Natural Sciences), 2019, 47 (1): 1-6. (in Chinese))

[2] 李婧,闫磊,屈春来,等. 分位数回归和 GAMLSS 模型在非一致性洪水频率分析中的比较[J]. 水利水电科技

进展, 2020, 40 (5): 48-54. (LI Jing, YAN Lei, QU Chunlai, et al. Comparison of quantile regression and GAMLSS model in non-stationary flood frequency analysis [J]. Advances in Science and Technology of Water Resources, 2020, 40 (5): 48-54. (in Chinese))

[3] 李帆,郑骞,张磊. Copula 熵方法及其在三变量洪水频率计算中的应用[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2016, 44 (5): 443-448. (LI Fan, ZHENG Qian, ZHANG Lei. Copula entropy method and its application to trivariate flood frequency calculation [J]. Journal of Hohai University (Natural Sciences), 2016, 44 (5): 443-448. (in Chinese))

[4] 徐晓,林盛吉,张徐杰,等. 气候变化对衢州水文站洪水频率分析的影响[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2010, 38 (6): 625-628. (XU Xiao, LIN Shengji, ZHANG Xujie, et al. Impact of climate change on flood frequency analysis at Quzhou hydrological station [J]. Journal of Hohai University (Natural Sciences), 2010, 38 (6): 625-628. (in Chinese))

[5] 杨涛,陈喜,杨红卫,等. 基于线性矩法的珠江三角洲区域洪水频率分析[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2009, 37 (6): 615-619. (YANG Tao, CHEN Xi, YANG Hongwei, et al. Regional flood frequency analysis in Pearl River Delta region based on L-moments approach [J]. Journal of Hohai University (Natural Sciences), 2009, 37 (6): 615-619. (in Chinese))

[6] 金光炎. 水文频率分布模型的异同性与参数估计问题[J]. 水科学进展, 2010, 21 (4): 466-470. (JIN Guangyan. Similarities and differences of hydrological frequency distribution models and parameter estimation

- problems[J]. Advances in Water Science,2010,21(4): 466-470. (in Chinese))
- [7] 王博,宋松柏,夏积德,等. 新型智能优化算法估算年降水量频率曲线参数[J]. 水力发电学报,2019,38(12): 49-60. (WANG Bo, SONG Songbai, XIA Jide, et al. New intelligent optimization algorithm to estimate the parameters of annual precipitation frequency curve[J]. Journal of Hydroelectric Engineering,2019,38(12): 49-60. (in Chinese))
- [8] 常浩浩,宋松柏,吴海江,等. 基于 Johnson 分布的年降水量频率分析[J]. 水力发电学报,2021,40(3):76-83. (CHANG Haohao, SONG Songbai, WU Haijiang, et al. Frequency analysis of annual precipitation based on Johnson distribution [J]. Journal of Hydroelectric Engineering,2021,40(3):76-83. (in Chinese))
- [9] 刘德平. 改进的矩法在洪水频率分析中的适用性研究[J]. 电力勘测设计,1995(3):37-41. (LIU Deping. Improved moment method for flood frequency analysis[J]. Electric Power Survey & Design,1995(3):37-41. (in Chinese))
- [10] 李航,宋松柏,石继海. 指数 Gamma 分布参数估计方法对比研究[J]. 水力发电学报,2019,38(4):96-107. (LI Hang, SONG Songbai, SHI Jihai. Comparison of parameter estimation methods for exponential Gamma distribution [J]. Journal of Hydroelectric Engineering,2019,38(4): 96-107. (in Chinese))
- [11] 肖可以,宋松柏. 最大熵原理在水文频率参数估计中的应用[J]. 西北农林科技大学学报(自然科学版),2010,38(2):197-205. (XIAO Keyi, SONG Songbai. Application of maximum entropy principle in the estimation of hydrological frequency parameter[J]. Journal of Northwest A&F University (Natural Science Edition),2010,38(2):197-205. (in Chinese))
- [12] HOSKING J R M. L-moments; analysis and estimation of distributions using linear combinations of order statistics [J]. Journal of the Royal Statistical Society,1990,52(1): 105-124.
- [13] ELAMIR E A H, SEHEULT A H. Trimmed L-moments [J]. Computational Statistics & Data Analysis,2003,43(3):299-314.
- [14] NOURA A T. TL-moments of the exponentiated generalized extreme value distribution [J]. Journal of Advanced Research,2010,1(4):351-359.
- [15] AHMAD U N, SHABRI A, ZAKARIA Z A. An analysis of annual maximum streamflows in Terengganu, Malaysia using TL-moments approach[J]. Theoretical and Applied Climatology,2013,111(3/4):649-663.
- [16] MAT N A M, SHABRI A. Estimating distribution parameters of annual maximum streamflows in Johor, Malaysia using TL-moments approach[J]. Theoretical and Applied Climatology,2017,127(1/2):213-227.
- [17] AHMAD U N, SHABRI A, ZAKARIA Z A. TL-moments and L-moments estimation of the generalized logistic distribution [J]. Journal of Mathematics,2011,3(1): 97-106.
- [18] ASQUITH W H. L-moments and TL-moments of the generalized lambda distribution [J]. Computational Statistics & Data Analysis,2007,51(9):4484-4496.
- [19] ARIFF N M. Regional frequency analysis of maximum daily rainfalls using TL-moments approach [D]. Skudai: University Teknologi Malaysia,2009
- [20] HOSKING J R M. Some theory and practical uses of trimmed L-moments [J]. Journal of Statistical Planning and Inference,2006,137(9):3024-3039.
- [21] MONIEM I A. L-moments and TL-moments estimation for the exponential distribution [J]. Far East Journal of Theoretical Statistics,2007,23(1):51-61.
- [22] MONIEM I A. TL-moments and L-moments estimation for the Weibull distribution [J]. Advances Applications in Statistics,2009,15(1):83-99.
- [23] SHABRI A, DAUD Z M, ARIFF N M. Regional analysis of annual maximum rainfall using TL-moments method[J]. Theoretical and Applied Climatology,2011,104(3/4): 561-570.
- [24] SHAHZAD M N, ASHGAR Z. Parameter estimation of Singh Maddala distribution by moments [J]. International Journal of Advanced Statistics Probability,2013,1(3): 121-131.
- [25] MONIEM I A, SELIM Y M. TL-moments and L-moments estimation for the generalized pareto distribution [J]. Applied Mathematical Sciences,2009,3(1):43-52.
- [26] 姚成,邱桢毅,李致家,等. API 模型和新安江模型的参数区域化研究与应用[J]. 河海大学学报(自然科学版),2019,47(3):189-194. (YAO Cheng, QIU Zhenyi, LI Zhijia, et al. Parameter regionalization study and application of API model and Xin'anjiang model [J]. Journal of Hohai University (Natural Sciences),2019,47(3):189-194. (in Chinese))
- [27] CUNNANE C. Review of statistical models for flood frequency estimation [J]. Hydrological Frequency Modelling,1987.
- [28] WANG Q J. Estimation of the GEV distribution from censored samples by method of partial probability weighted moments[J]. Journal of Hydrology,1990,120(1/2/3/4): 103-114.
- [29] AHMAD U N, SHABRI A, ZAKARIA Z A. Trimmed L-moments (1,0) for the generalized pareto distribution [J]. Hydrological Sciences Journal,2011,56(6): 1053-1060.

(收稿日期:2021-08-30 编辑:熊水斌)